Analyse Fonctionnelle

Isabelle Gallagher

École Normale Supérieure de Paris
Année universitaire 2018–2019

Mis à jour le 22 mai 2019

Table des matières

Chapitre A

Sur les espaces de Fréchet et de Banach

A.1. Espaces de Fréchet

A.1.1. Rappels de topologie.

Rappels. • Un espace vectoriel (réel) topologique E est un espace vectoriel muni d'une topologie rendant continues les applications

$$(x, y) \in E \times E \longmapsto x + y\,, \quad (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \longmapsto \lambda x\,.$$

• Une application entre deux espaces vectoriels topologiques E et F est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E.

• Un espace topologique est dit *séparé* si deux points distincts admettent des voisinages distincts.

• Un espace topologique est dit *localement compact* s'il est séparé et s'il admet un système fondamental de voisinages compacts (ou encore si tout élément admet un voisinage compact). Par exemple $\mathbb{R},]a, b[, \mathbb{R}^n$ sont localement compacts. En revanche $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne le sont pas.

• Dans tout espace topologique X, l'intersection d'une famille finie d'ouverts denses est encore dense (si $(U_i)_{0\leq i\leq n}$ est une telle famille et V est un ouvert non vide de X, alors $V \cap U_0$ est un ouvert non vide de X car U_0 est dense, et ainsi de suite). Cette propriété ne se généralise pas aux familles infinies, même dénombrables (par exemple si $X = \mathbb{Q}$, muni de la topologie induite de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, alors $(\mathbb{Q} \setminus \{x\})_{x\in\mathbb{Q}}$ est une famille dénombrable d'ouverts denses dont l'intersection est vide).

A.1.2. Théorème de Baire.

Définition A.1.1. *Un espace topologique est dit de Baire si l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses est dense dans cet espace.*

Théorème A.1.2 (Baire, 1874-1932)**.** *Les espaces topologiques localement compacts et les ouverts d'un espace métrique complet sont des espaces de Baire.*

Démonstration. Nous ne démontrerons que le premier cas, l'autre a été traité dans le cours de Topologie et Calcul Différentiel du premier semestre.

Soit donc X un espace topologique localement compact et soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses. Soit V un ouvert non vide de X et montrons que $V \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n)$ est non vide. On sait que $V \cap U_0$ est non vide, soit donc $x_0 \in V \cap U_0$ et soit V_0 un voisinage ouvert de x_0 avec $\overline{V_0}$ compact inclus dans $V \cap U_0$. On construit ainsi par récurrence une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une famille d'ouverts $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que V_n est un voisinage ouvert de $x_n \in V_{n-1} \cap U_n$ et $\overline{V_n}$ est un compact inclus dans $V_{n-1} \cap U_n$. Alors $\cap \overline{V_n}$ est une intersection décroissante de compacts non vides de $\overline{V}$, qui est non vide et contenue dans $V \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n)$. D'où le résultat. □

Exercice. Tout ouvert d'un espace de Baire est de Baire.

Corollaire A.1.3. *Soit X un espace de Baire. Une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide de X est d'intérieur vide dans X.*

Si la réunion d'une famille dénombrable de fermés de X est d'intérieur non vide dans X, alors l'un des fermés est d'intérieur non vide dans X.

Démonstration. Exercice. □

Définition A.1.4. *a) Une partie d'un espace topologique est dite maigre, ou négligeable au sens de Baire, si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.*

b) Un $\mathcal{G}_\delta$-dense est une intersection dénombrable d'ouverts denses.

c) Une propriété portant sur les points d'un espace topologique est vraie presque partout au sens de Baire si elle est vraie en dehors d'un ensemble maigre (donc au moins sur un $\mathcal{G}_\delta$-dense).

Exemples. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est maigre dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est un $\mathcal{G}_\delta$-dense dans $\mathbb{R}$. Le corollaire A.1.6 ci-dessous indique qu'une fonction dérivable est de classe C^1, Baire presque partout.

Attention. Ne pas confondre *presque partout au sens de Baire* et *presque partout au sens des mesures*! (voir Exercices).

Proposition A.1.5. *Soit X un espace de Baire et Y un espace métrique. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de X dans Y, convergeant simplement vers une application f. Alors f est continue presque partout au sens de Baire.*

Démonstration. On définit les fermés, pour tous les entiers naturels n, p, q,

$$F_{n,p,q} := \Big\{x \in X \,/\, d\big(f_p(x), f_q(x)\big) \leq 2^{-n}\Big\} \quad \text{et} \quad F_{n,p} := \bigcap_{q\geq p} F_{n,p,q}\,.$$

Pour tout $x \in X$, $f_p(x)$ converge vers $f(x)$ quand p tend vers l'infini, donc la suite $(f_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour tout $x \in X$ et donc

$$X = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_{n,p}\,,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit U un ouvert non vide de X, alors U est de Baire. En écrivant

$$U = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_{n,p} \cap U$$

réunion dénombrable de fermés de U, il existe par le corollaire A.1.3 un entier p_0 tel que l'intérieur de $F_{n,p_0} \cap U$ dans U soit non vide. Notons-le $A_{n,U}$. Comme U est ouvert, l'ensemble $A_{n,U}$ est inclus dans F_{n,p_0}. Donc l'union sur tout les ouverts U des $A_{n,U}$, notée A_n, est un ouvert dense. Notons $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, qui est un $\mathcal{G}_\delta$-dense, et montrons que f est continue en tout point de A. Soit $a \in A$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que a appartient à l'intérieur de $F_{n,p}$. Soit donc $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ associé. Par continuité de f_p il existe un voisinage de a dans lequel tout a' vérifie

$$d\big(f_p(a), f_p(a')\big) \leq 2^{-n}\,.$$

Par ailleurs tous les points x de $F_{n,p}$ vérifient

$$d\big(f_p(x), f(x)\big) = \lim_{q\to\infty} d\big(f_p(x), f_q(x)\big) \leq 2^{-n}\,.$$

Le résultat suit alors par l'inégalité triangulaire : on a pour tout a' dans $F_{n,p}$ suffisamment proche de a

$$d\big(f(a'),f(a)\big) \leq d\big(f(a'),f_p(a')\big) + d\big(f_p(a'),f_p(a)\big) + d\big(f_p(a),f(a)\big) \leq 3\cdot 2^{-n}$$

et la proposition est démontrée. □

Corollaire A.1.6. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, F un espace de Banach et $f : I \to F$ une application dérivable. Alors f' est continue Baire presque partout.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à

$$f_n(x) := 2^n\Big(f(x+2^{-n}) - f(x)\Big),$$

ce qui démontre le résultat. □

A.1.3. Semi-normes.

Définition A.1.7. *Soit E un espace vectoriel. On appelle semi-norme sur E toute application $p : E \to \mathbb{R}^+$ sous-additive et absolument homogène :*

$$\forall (x,y)\in E\times E\,,\quad p(x+y)\leq p(x)+p(y)\,;$$
$$\forall \lambda\in\mathbb{R}\,,\quad \forall x\in E\,,\quad p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)\,.$$

On dit qu'une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes sépare les points (ou est séparante) si

$$p(x)=0\ \ \forall p\in\mathcal{P} \quad\Longrightarrow\quad x=0\,.$$

Exemples. • Une norme est une semi-norme qui sépare les points.
• Soit $E = C(]0,1[;\mathbb{R})$. La famille définie par $p_a(f) := |f(a)|$ est une semi norme pour tout $a\in]0,1[$ et $\mathcal{P} := (p_a)_{a\in]0,1[}$ est une famille de semi-normes qui sépare les points.

Soit $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ une famille de semi-normes. Les ouverts de la topologie associée à $\mathcal{P}$ sont les parties U de E telles que

$$\begin{aligned} &\forall x\in U\,,\quad \exists \mathcal{B}\subset\mathcal{A}\neq\emptyset \text{ fini et } r>0 \quad\text{tels que} \\ &B_{\mathcal{B}}(x,r) := \{y\in E\,/\,\forall\beta\in\mathcal{B}\,,\ p_\beta(x-y)<r\}\subset U\,. \end{aligned} \tag{A.1}$$

On rappelle que dans un espace vectoriel topologique E, une suite (x_n) converge vers X si et seulement si pour tout voisinage ouvert U de l'origine, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $x_n - x\in U$ pour tout $n\geq N$.

Proposition A.1.8. *Soit E un espace vectoriel topologique muni d'une famille de semi-normes $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Une suite de points (x_n) de E converge vers $x\in E$ pour la topologie associée si et seulement si pour tout $\alpha\in\mathcal{A}$, $p_\alpha(x_n-x)$ converge vers 0.*

Démonstration. Exercice. □

Remarques. a) E est séparé si et seulement si $\mathcal{P}$ sépare les points.

b) Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux familles de semi-normes avec $\mathcal{P}\subset\mathcal{P}'$ alors la topologie associée à $\mathcal{P}'$ est plus fine que celle associée à $\mathcal{P}$.

On rappelle qu'un ensemble A d'un espace vectoriel topologique E est borné si pour tout voisinage V de l'origine, il existe une constante $C>0$ telle que $A\subset C\cdot V$.

Proposition A.1.9. *Soit E un espace vectoriel topologique muni d'une famille séparante de semi-normes $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Un ensemble $A\subset E$ est borné si et seulement si pour tout $\alpha\in\mathcal{A}$ il existe C_α tel que*

$$\forall x\in A\,,\quad p_\alpha(x) < C_\alpha\,.$$

Démonstration. Supposons A borné. Par la définition (A.1), pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ l'ensemble

$$V_\alpha := \{x \in E \,/\, p_\alpha(x) < 1\}$$

est un voisinage ouvert de 0 donc il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que $A \subset C_\alpha \cdot V_\alpha$. Par homogénéité de p_α on a donc

$$\forall x \in A\,, \quad p_\alpha(x) < C_\alpha\,.$$

Inversement supposons cette assertion vraie pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$. On sait que tout ouvert de E voisinage de 0 contient un ensemble du type

$$V = \bigcap_{\alpha=1}^{L} \{x \in E \,/\, p_{\alpha_j}(x) < \varepsilon_j\}$$

pour un certain choix de $L, p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_L}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_L$. On vérifie alors que

$$A \subset C \cdot V \quad \text{avec} \quad C = 2 \max_{1 \leq j \leq L} \frac{C_{\alpha_j}}{\varepsilon_j}\,.$$

La proposition est démontrée. □

A.1.4. Espaces de Fréchet.

Définition A.1.10 (Fréchet (1878-1973))**.** *On dit qu'un espace vectoriel E est un pré-Fréchet s'il existe une famille dénombrable $\mathcal{P} = (p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de semi-normes séparantes telles que*

$$p_j(x) \leq p_{j+1}(x)\,, \quad \forall j \in \mathbb{N}\,, \quad \forall x \in E\,.$$

Notons que l'hypothèse de croissance n'est pas strictement nécessaire mais on peut toujours s'y ramener en remplaçant p_j par $\sum_{k\leq j} p_k$ par exemple. La topologie d'un pré-Fréchet est métrisable avec la distance (invariante par translation)

$$d(x,y) := \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j} \min(1, p_j(x-y))\,.$$

Définition A.1.11. *Un espace de Fréchet est un pré-Fréchet complet.*

Exemples. a) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des fonctions $C^\infty(K)$ est un espace de Fréchet, muni des semi-normes

$$\forall j \in \mathbb{N}\,, \quad p_j(f) := \sup_{|\alpha|\leq j} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha f(x)|\,.$$

b) L'espace $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est un Fréchet (considérer les applications $f \mapsto \|f\|_{L^p(K_j)}$ pour K_j suite exhaustive de compacts de $\mathbb{R}^n$).

c) Tout sous-espace fermé d'un Fréchet est un Fréchet.

Remarque. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il est beaucoup plus difficile de définir sur l'ensemble des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact une «bonne» topologie. On y reviendra au Chapitre B.

Lemme A.1.12. *Soient $(E,(p_j)_{j\in\mathbb{N}})$ et $(F,(q_k)_{k\in\mathbb{N}})$ deux pré-Fréchet, et soit T une application linéaire de E dans F. Alors T est continue si et seulement si*

$$\forall k \in \mathbb{N}\,, \quad \exists C > 0\,,\, j \in \mathbb{N}\,, \quad \forall x \in E\,, \quad q_k(Tx) \leq C p_j(x)\,. \tag{A.2}$$

Démonstration. Supposons que l'application T est linéaire continue. Alors pour tout entier k, il existe un voisinage ouvert U de l'origine tel que

$$\forall x \in U\,, \quad q_k(Tx) < 1\,.$$

Mais il existe $j \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{x \in E \,/\, p_j(x) < \varepsilon\} \subset U$$

et le résultat (A.2) suit alors par homogénéité : si $x \in E$ alors $\dfrac{\varepsilon}{2p_j(x)} x$ appartient à U et donc

$$q_k(Tx) = \frac{2}{\varepsilon} p_j(x) q_k\Big(\frac{\varepsilon}{2p_j(x)} Tx\Big) \leq \frac{2}{\varepsilon} p_j(x)\,.$$

Inversement soit $T : E \to F$ une application linéaire et supposons que (A.2) soit satisfaite. Soit $x \in E$. Si U est un voisinage ouvert de Tx dans F alors il existe $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\Big\{y \in F \,/ \quad q_k(Tx - y) < \varepsilon\Big\} \subset U\,.$$

Par hypothèse il existe $C > 0$ et $j \in \mathbb{N}$ tels que si

$$p_j(x - x') \leq \frac{\varepsilon}{C}$$

alors

$$q_k(Tx - Tx') \leq \varepsilon$$

et donc Tx' appartient à U. Le résultat suit. □

A.1.5. Théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème A.1.13 (1927 ; Banach 1892-1945, Steinhaus 1887-1972)**.** *Soient E un espace de Fréchet muni d'une famille de semi-normes (p_j) et F un pré-Fréchet muni d'une famille de semi-normes (q_k). On considère une famille $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ d'applications linéaires continues de E dans F telles que pour tout $x \in E$, la famille $(T_\alpha x)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ est bornée dans F. Alors $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ est équi-continue : plus précisément*

$$\forall k \in \mathbb{N}\,, \quad \exists C > 0\,, j \in \mathbb{N}\,, \quad \forall x \in E\,, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}\,, \quad q_k(T_\alpha x) \leq C p_j(x)\,.$$

Dans le cas où E et F sont des espaces de Banach cela signifie qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E\,, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}\,, \quad \|T_\alpha x\|_F \leq C \|x\|_E\,.$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère

$$E_n := \{x \in E \,/\, \forall \alpha \in \mathcal{A}\,, \quad q_k(T_\alpha x) \leq n\}\,.$$

L'ensemble E_n est fermé, et par l'hypothèse du théorème on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E\,.$$

Par le théorème de Baire (Corollaire A.1.3) il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de E_N est non vide. Soit alors $x_0 \in E$ et un voisinage V ouvert de 0 dans E, tels que $x_0 + V \subset E_N$. Ce voisinage contient

$$B_{j,\varepsilon} := \{x \in E \,/\, p_j(x) < \varepsilon\}$$

pour un certain entier j et un certain réel $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $x \in B_{j,1}$

$$\begin{aligned} q_k(T_\alpha x) &= \frac{1}{\varepsilon} q_k(T_\alpha(\varepsilon x)) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}\Big(q_k(T_\alpha(x_0 + \varepsilon x)) + q_k(T_\alpha x_0)\Big) \leq \frac{2N}{\varepsilon}\,. \end{aligned}$$

Le théorème suit par homogénéité. □

Corollaire A.1.14. *Soient E un espace de Fréchet et F un pré-Fréchet. On considère une famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications linéaires continues de E dans F convergeant simplement vers T. Alors T est linéaire continue de E dans F. De plus si (x_n) converge vers x dans E alors $(T_n x_n)$ converge vers Tx dans F.*

Démonstration. Exercice. □

Corollaire A.1.15. *Soit G un espace de Banach et B un sous-ensemble de G. On note G^* l'ensemble des formes linéaires continues sur G. On suppose que pour tout $f \in G^*$, l'ensemble $f(B) := \bigcup_{b\in B} f(b)$ est borné. Alors B est borné.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Banach-Steinhaus à $E = G^*$, $F = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = B$. La famille $(T_b f)_{b\in B}$ définie par

$$T_b f := f(b)\,, \quad f \in G^*\,, \quad b \in B$$

et bornée donc $(T_b f)_{b\in B}$ est uniformément bornée : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in G^*$ et tout $b \in B$

$$|T_b f| \leq C\|f\|_{G^*}\,.$$

Le corollaire est démontré. □

A.1.6. Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé.

Théorème A.1.16 (Application ouverte)**.** *Soient E et F deux espaces de Fréchet et T une application de E dans F linéaire, continue et surjective. Alors T est ouverte, c'est-à-dire que l'image par T de tout ouvert de E est un ouvert de F. Si T est bijective alors c'est un homéomorphisme.*

Démonstration. On munit E et F d'une famille de semi-normes et on leur associe la topologie définie au Paragraphe A.1.3 ainsi que les distances d_E et d_F associées (voir le Paragraphe A.1.4). On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0\,, \quad \exists \rho > 0\,, \quad \forall x \in E\,, \quad B_F(Tx,\rho) \subset T\big(B_E(x,\varepsilon)\big)\,.$$

Montrons tout d'abord que

$$\forall r > 0\,, \quad \exists \rho > 0\,, \quad \forall x \in E\,, \quad B_F(Tx,\rho) \subset \overline{T\big(B_E(x,r)\big)}\,.$$

Par invariance par translation de la distance associée aux semi-normes et par linéarité de T, il suffit de démontrer

$$\forall r > 0\,, \quad \exists \rho > 0\,, \quad B_F(0,\rho) \subset \overline{T\big(B_E(0,r)\big)}\,. \tag{A.3}$$

Commençons par montrer le résultat pour $x = 0$. Soit donc $r > 0$, et soit $F_n := \overline{nT\big(B_E(0,\frac{r}{2})\big)}$. Alors $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ car T est linéaire surjective et

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB_E(0,\frac{r}{2})\,.$$

Donc par le théorème de Baire (Corollaire A.1.3), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de F_N est non vide. Donc l'intérieur de $\overline{T\big(B_E(0,\frac{r}{2})\big)}$ est non vide (car les homothéties sont des homéomorphismes). Donc il existe $y \in F$ et $\rho > 0$ tel que $B_F(y,\rho) \subset \overline{T\big(B_E(0,\frac{r}{2})\big)}$. On écrit alors

$$\begin{aligned} B_F(0,\rho) &= -y + B_F(y,\rho) \\ &\subset -y + \overline{T\big(B_E(0,\frac{r}{2})\big)} \end{aligned}$$

et donc par symétrie et par linéarité de T,

$$\begin{aligned} B_F(0,\rho) &\subset \overline{T(B_E(0,\frac{r}{2}))} + \overline{T(B_E(0,\frac{r}{2}))} \\ &\subset \overline{T(B_E(0,r))}\,. \end{aligned}$$

Le résultat (A.3) suit.

Pour conclure montrons plus généralement le résultat suivant : si X et Y sont deux espaces métriques avec X complet et si T est une application continue de X dans Y vérifiant

$$\forall r>0\,,\quad \exists \rho>0\,,\quad \forall x\in X\,,\quad B_Y(Tx,\rho)\subset \overline{T(B_X(x,r))}\,, \tag{A.4}$$

alors

$$\forall r>0\,,\quad \exists \rho>0\,,\quad \forall x\in X\,,\quad B_Y(Tx,\rho)\subset T(B_X(x,3r))$$

ce qui achèvera la démonstration du théorème. Soit donc $r>0$ et ρ associé par (A.4) et considérons une suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs, décroissante vers zéro telle que $\rho_0=\rho$ et

$$\forall x\in X\,,\quad B_Y(Tx,\rho_n)\subset \overline{T(B_X(x,2^{-n}r))}\,.$$

Soit maintenant $x\in X$ fixé, et soit $y\in B_Y(Tx,\rho)$. Il s'agit de montrer que $y\in T(B_X(x,3r))$.

On va construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que $Tx_n\in B_Y(y,\rho_n)$ et $x_n\in B_X(x_{n-1},2^{1-n}r)$. On choisit $x_0=x$, qui convient puisque y appartient à $B_Y(Tx,\rho)$ et donc Tx appartient à $B_Y(y,\rho)$. Supposons $x_0,\dots,x_{n-1}$ construits. Alors y appartient à $B_Y(Tx_{n-1},\rho_{n-1})$, et donc à $\overline{T(B_X(x_{n-1},2^{1-n}r))}$ par définition de ρ_{n-1}. 0n peut donc trouver un point de $B_X(x_{n-1},2^{1-n}r)$ dont l'image par T est arbitrairement proche de y, et en particulier il existe x_n dans $B_X(x_{n-1},2^{1-n}r)$ tel que $Tx_n\in B_Y(y,\rho_n)$, ce qui termine la construction. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X car par l'inégalité triangulaire dès que $p\geq 2$

$$d_X(x_n,x_{n+p})\leq \sum_{k=0}^{p-1} d_X(x_{n+k},x_{n+k+1})\leq r\sum_{k=0}^{p-1}2^{-n-k}<2^{1-n}r \quad \longrightarrow 0\,,\quad n\to\infty\,.$$

Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $x'\in X$, qui vérifie par le même calcul que ci-dessus (en prenant $n=0$ et $p\to\infty$)

$$d_X(x,x')<3r\,.$$

Par continuité de T et comme $d_Y(Tx_n,y)\leq\rho_n$, on en déduit que

$$y=\lim_{n\to\infty}Tx_n=Tx'\,.$$

On a donc $y\in T(B_X(x,3r))$, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque. La démonstration montre que si T n'est pas surjective alors $T(E)$ est maigre.

Théorème A.1.17 (Graphe fermé)**.** *Soient E et F deux espaces de Fréchet et T une application linéaire de E dans F. Alors T est continue si et seulement si son graphe*

$$G:=\{(x,y)\in E\times F\,/\,y=Tx\}$$

est fermé dans $E\times F$.

Démonstration. Il est toujours vrai que si T est continue alors son graphe est fermé.

Inversement supposons que G est fermé. Comme T est linéaire, G est un sous-espace vectoriel de $E \times F$, qui est fermé dans $E \times F$ par hypothèse, donc G est un Fréchet. L'application de première projection

$$\pi_1 : \begin{aligned} G &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

est linéaire, continue et bijective donc par le théorème de l'application ouverte c'est un isomorphisme. En notant

$$\pi_2 : \begin{aligned} G &\longrightarrow F \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

l'application de deuxième projection, il s'ensuit que $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ est continue. □

A.2. Théorèmes de Hahn-Banach

A.2.1. Rappels sur le lemme de Zorn. Soit P un ensemble muni d'une relation d'ordre partielle $\prec$.

On dit qu'un sous-ensemble Q de P est *totalement ordonné* si

$$\forall (a, b) \in Q\,, \quad \text{soit} \quad a \prec b \quad \text{soit} \quad b \prec a\,.$$

On dit que $c \in P$ est un *majorant* d'un sous-ensemble Q de P si

$$\forall a \in Q\,, \quad a \prec c\,.$$

On dit que $m \in P$ est un *élément maximal* de P si

$$\forall x \in P\,, \quad m \prec x \Longrightarrow x = m\,.$$

On dit que P est *inductif* si tout sous-ensemble totalement ordonné de P admet un majorant.

Lemme A.2.1 (Zorn, 1935)**.** *Tout ensemble ordonné inductif non vide admet un élément maximal.*

Remarque. La démonstration repose sur la forme forte de l'axiome du choix (Zermelo, 1904) et sera admise. Ce lemme a des applications importantes, pour montrer des résultats d'existence (base d'un espace vectoriel, forme linéaire sur un espace vectoriel...).

Exemples.

a) Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E muni de l'inclusion est inductif car E majore tout sous-ensemble de E. Dans ce cas le lemme de Zorn est trivial puisque E est maximal.

b) Soit $\mathcal{I}(E, F)$ l'ensemble des injections partielles de E dans F défini de la façon suivante. Un ensemble $G \subset E \times F$ appartient à $\mathcal{I}(E, F)$ si l'on a : (x, y) et (x, y') sont dans G implique que $y = y'$ et de même (x, y) et (x', y) sont dans G implique que $x = x'$. Muni de l'inclusion, cet ensemble est inductif. Le lemme de Zorn implique alors qu'il existe un élément maximal, dont on vérifie que c'est le graphe d'une injection de E dans F, ou d'une injection de F dans E. On en déduit que pour tous les ensembles E et F, il existe une injection de l'un dans l'autre ou réciproquement (c'est le *théorème de comparabilité cardinale*).

Les théorèmes A.2.2 et A.2.13 qui suivent peuvent être démontrés sans le lemme de Zorn (donc sans la forme forte de l'axiome du choix) si l'on suppose que l'espace de départ est de dimension dénombrable (par exemple un espace de Hilbert) ou séparable. Ils ont été obtenus de manière indépendante par Hahn et Banach dans les années 1927-1930.

L'intérêt de la «forme analytique» (Paragraphe A.2.2) est de permettre d'introduire (par dualité) des topologies faibles, pour lesquelles on a de bonnes propriétés de compacité. La «forme géométrique» (Paragraphe A.2.3) est notamment utile en analyse convexe. Nous verrons des applications des deux formes dans ce cours.

A.2.2. Théorème de Hahn-Banach (forme analytique). Soit E un espace vectoriel réel et F un sous-espace vectoriel de E. Si f est une forme linéaire sur F, on dit que $\widetilde{f}$ est un prolongement linéaire de f à E si $\widetilde{f}$ est une forme linéaire sur E telle que $\widetilde{f}_{|F} = f$.

On rappelle qu'une application positivement homogène vérifie

$$\forall \lambda > 0\,, \quad \forall x \in E\,, \quad p(\lambda x) = \lambda p(x)\,.$$

Théorème A.2.2 (Hahn-Banach - forme analytique)**.** *Soit E un espace vectoriel réel et $p : E \to \mathbb{R}$ une application sous-additive et positivement homogène. Si F est un sous-espace vectoriel de E et f est une forme linéaire sur F telle que*

$$\forall x \in F\,, \quad f(x) \leq p(x)\,,$$

alors il existe un prolongement linéaire $\widetilde{f}$ de f à E tel que

$$\forall x \in E\,, \quad \widetilde{f}(x) \leq p(x)\,.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des prolongements de f dominés par p, c'est-à-dire l'ensemble des couples (G, g) avec G sous-espace vectoriel de E contenant F, et où g est une forme linéaire sur G telle que $g_{|F} = f$ et vérifiant

$$\forall x \in G\,, \quad g(x) \leq p(x)\,.$$

Alors $\mathcal{P}$ est non vide car $(F, f) \in \mathcal{P}$. Par ailleurs $\mathcal{P}$ est ordonné par la relation d'ordre partiel

$$(G_1, g_1) \prec (G_2, g_2) \quad \text{si} \quad G_1 \subset G_2 \quad \text{et} \quad g_{2|G_1} = g_1\,.$$

Montrons que $\mathcal{P}$ est inductif : soit $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ un ensemble totalement ordonné, que l'on écrit sous la forme

$$\mathcal{Q} = (G_i, g_i)_{i \in I}\,.$$

Un majorant de $\mathcal{Q}$ est le couple $(\widetilde{G}, \tilde{g})$ avec

$$\widetilde{G} := \bigcup_{i \in I} G_i \quad \text{et} \quad \forall x \in \widetilde{G}\,,\ \tilde{g}(x) := g_i(x) \text{ avec } x \in G_i\,.$$

En effet $\tilde{g}$ est bien définie, $(\widetilde{G}, \tilde{g}) \in \mathcal{P}$ et $(\widetilde{G}, \tilde{g})$ est un majorant pour $\mathcal{Q}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est donc inductif. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{P}$ admet donc un élément maximal $(G_0, g_0) \in \mathcal{P}$.

Montrons que $G_0 = E$. Sinon il existe $x_0 \in E \setminus G_0$ et on pose $G' := G_0 + \mathbb{R}x_0$. On définit l'application g' sur G' par

$$\forall x \in G_0\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad g'(x + tx_0) = g_0(x) + t\alpha$$

et l'on va construire $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $(G', g') \in \mathcal{P}$ (ce qui fournira une contradiction puisque $(G_0, g_0) \prec (G', g')$). On doit donc choisir α de sorte que pour tout $x \in G_0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g'(x + tx_0) \leq p(x + tx_0)\,.$$

Comme p est sous-additive et positivement homogène, il suffit de démontrer le résultat pour $|t| = 1$, donc de construire α de sorte que pour tout $x \in G_0$

$$g_0(x) + \alpha \leq p(x + x_0) \quad \text{et} \quad g_0(x) - \alpha \leq p(x - x_0)\,.$$

Il suffit donc de démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{y\in G_0} \left(g_0(y) - p(y - x_0)\right) \le \alpha \le \inf_{y\in G_0} \left(p(y + x_0) - g_0(y)\right). \tag{A.5}$$

Mais pour tout $y, y' \in G_0$

$$g_0(y) + g_0(y') = g_0(y + y') \le p(y + y') \le p(y' + x_0) + p(y - x_0).$$

On a donc

$$\sup_{y\in G_0} \left(g_0(y) - p(y - x_0)\right) \le \inf_{y'\in G_0} \left(p(y' + x_0) - g_0(y')\right),$$

et (A.5) est donc vérifié. On en déduit la contradiction cherchée, donc $G_0 = E$.

Le théorème A.2.2 est démontré en choisissant $\widetilde{f} = g_0$. □

On note dorénavant E^* l'ensemble des formes linéaires continues sur E, muni de la norme

$$\|f\|_{E^*} := \sup_{\|x\|_E\le 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_E\le 1} f(x).$$

Corollaire A.2.3. *Soit E un espace vectoriel normé et G un sous-espace de E. Si f est une forme linéaire continue sur G alors on peut la prolonger en une forme linéaire continue sur E, de même norme que f.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème A.2.2 précédent à la fonction

$$p : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \|f\|_{G^*}\|x\|_E \end{array}$$

et le corollaire est démontré. □

Proposition A.2.4. *Soit E un espace vectoriel normé, alors pour tout $x \in E$ on a*

$$\|x\|_E = \sup_{\|f\|_{E^*}\le 1} |f(x)| = \max_{\|f\|_{E^*}\le 1} |f(x)|.$$

Démonstration. Soit $x \neq 0$ fixé dans E. On sait que

$$\sup_{\|f\|_{E^*}\le 1} |f(x)| \le \|x\|_E.$$

D'après le Lemme A.2.5 ci-dessous, il existe $f_x \in E^*$ telle que

$$\|f_x\|_{E^*} = \|x\|_E \quad \text{et} \quad f_x(x) = \|x\|_E^2.$$

Il suffit alors de poser

$$\tilde{f}_x := \frac{1}{\|x\|_E} f_x$$

qui vérifie

$$\|\tilde{f}_x\|_{E^*} = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{f}_x(x) = \|x\|_E.$$

Cela démontre le résultat cherché, à condition de démontrer le Lemme A.2.5 suivant. □

Lemme A.2.5. *Soit E un espace vectoriel normé. Pour tout $x_0 \in E$, il existe une forme linéaire continue $f_0 \in E^*$ telle que*

$$\|f_0\|_{E^*} = \|x_0\|_E \quad \textit{et} \quad f_0(x_0) = \|x_0\|_E^2.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Corollaire A.2.3 à $G = \mathbb{R}x_0$ et

$$f(tx_0) := t\|x_0\|_E^2.$$

et le lemme est démontré. □

A.2.3. Théorème de Hahn-Banach (forme géométrique).

A.2.3.1. *Hyperplans affines.* Soit E un espace vectoriel réel. Un *hyperplan affine* de E est un sous-espace affine de codimension 1 dans E. De manière équivalente, c'est un sous-espace H de E de la forme

$$H = \{x \in E \,/\, f(x) = \alpha\}$$

où f est une forme linéaire non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$ est donné. On dit que $f = \alpha$ est l'équation de H (toute autre équation est de la forme $\lambda f = \lambda\alpha$ avec $\lambda \neq 0$) et on note $H = [f = \alpha]$.

Proposition A.2.6. *Soit E un espace vectoriel topologique réel. L'hyperplan $H = [f = \alpha]$ est fermé si et seulement si f est continue.*

Démonstration. Si f est continue alors clairement l'hyperplan $H = [f = \alpha]$ est fermé, puisque les singletons de $\mathbb{R}$ sont fermés et $H = f^{-1}(\{\alpha\})$.

Montrons l'implication réciproque. Comme les translations sont des homéomorphismes on peut supposer que $\alpha = 0$. On rappelle que l'espace quotient $E_{/H}$ est séparé si et seulement si H est fermé. En outre comme H est un hyperplan, $E_{/H}$ est de dimension 1. On définit l'application linéaire f passée au quotient

$$\widetilde{f} : E_{/H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

et en notant $\pi : E \to E_{/H}$ la projection canonique (continue) on a $f = \widetilde{f} \circ \pi$ donc il suffit de montrer que $\widetilde{f}$ est continue, en 0 par linéarité. Notons que l'application $\widetilde{f}$ est définie de la manière suivante : on fixe dorénavant $x \in E_{/H}$ non nul, et l'on a

$$\forall y = \lambda x \in E_{/H}\,, \quad \widetilde{f}(y) = \lambda f(x)\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer qu'il existe un voisinage V_ε de 0 dans $E_{/H}$ tel que si $y = \lambda x \in V_\varepsilon$ alors $|\lambda| < \varepsilon$. Comme $E_{/H}$ est séparé, il existe un voisinage ouvert W_ε de 0 dans $E_{/H}$ ne contenant pas εx. On va transformer cet ensemble W_ε en un voisinage V_ε de 0 équilibré au sens où

$$|\mu| \leq 1 \Longrightarrow \mu V_\varepsilon \subset V_\varepsilon\,.$$

A cette fin on pose

$$V_\varepsilon := \bigcap_{|\nu| \geq 1} \nu W_\varepsilon\,.$$

On a clairement $V_\varepsilon \subset W_\varepsilon$, montrons que V_ε est un voisinage de 0. Par continuité de l'application $(\mu, y) \mapsto \mu y$, il existe $\eta > 0$ et un voisinage ouvert $\widetilde{W_\varepsilon}$ de 0 dans $E_{/H}$ tels que pour tout $y \in \widetilde{W_\varepsilon}$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $|\mu| \leq \eta$, on ait $\mu y \in W_\varepsilon$. Alors $\eta\widetilde{W_\varepsilon}$ est un voisinage ouvert de 0 contenu dans V_ε — puisque si $y \in \widetilde{W_\varepsilon}$ et $|\nu| \geq 1$ alors $|\eta/\nu| \leq \eta$ et donc $\eta y \in \nu W_\varepsilon$. On en déduit que V_ε est un voisinage de 0. Notons enfin que par construction

$$|\mu| \leq 1 \Longrightarrow \mu V_\varepsilon \subset V_\varepsilon\,.$$

En effet considérons $y \in V_\varepsilon$ et $|\mu| \leq 1$, il s'agit de montrer que pour tout $|\nu| \geq 1$, il existe $w \in W_\varepsilon$ tel que $\mu y = \nu w$. Mais $\nu' := \nu/\mu$ vérifie $|\nu'| \geq 1$ donc il existe $w \in W_\varepsilon$ tel que $y = \nu' w$ et le résultat suit. Montrons à présent que

$$\text{si} \quad y = \lambda x \in V_\varepsilon\,, \quad \text{alors} \quad |\lambda| < \varepsilon\,,$$

ce qui impliquera que $\widetilde{f} : y = \lambda x \mapsto \lambda f(x)$ est continue en 0. Supposons donc qu'il existe $y = \lambda x \in V_\varepsilon$ avec $|\lambda| \geq \varepsilon$. Alors en écrivant

$$\varepsilon x = \frac{\varepsilon}{\lambda} y$$

on constate que $y \in V_\varepsilon$ et $|\varepsilon/\lambda| \leq 1$ donc $\varepsilon x \in V_\varepsilon$. On a donc une contradiction et le résultat suit. $\square$

A.2.3.2. *Espaces localement convexes.* Cette notion, utile pour la théorie de la dualité (voir le paragraphe A.3.1) a été introduite dans les années trente, notamment par A. Kolmogorov. On rappelle que $A \subset E$ est convexe si

$$\forall t \in [0,1]\,, \quad \forall (x,y) \in A \times A\,, \quad tx + (1-t)y \in A\,.$$

Définition A.2.7 (Espace vectoriel topologique localement convexe)**.** *Soit E un espace vectoriel topologique réel. On dit que E est localement convexe si l'origine admet un système fondamental de voisinages convexes.*

Remarque. L'intérieur d'un convexe d'intérieur non vide est encore convexe, donc on peut rajouter "ouverts" dans la définition précédente.

Définition A.2.8 (Jauge d'un convexe)**.** *Soit E un espace vectoriel topologique réel et C un voisinage convexe de l'origine. On appelle jauge de C (ou encore fonctionnelle de Minkowski) l'application*

$$\|\cdot\|_C : \quad \begin{aligned} &E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ &x \longmapsto \inf\{t > 0 \,/\, \frac{1}{t}x \in C\} = \inf\{t > 0 \,/\, x \in tC\}\,, \end{aligned}$$

en convenant que $\inf(\emptyset) = \infty$.

Lemme A.2.9. *Soit E un espace vectoriel topologique réel et C un voisinage convexe de l'origine. La jauge de C est bien définie et les propriétés suivantes sont vérifiées :*

a) pour tout $\lambda > 0$ et pour tout couple (x,y) de E,

$$\|\lambda x\|_C = \lambda \|x\|_C \quad \textit{et} \quad \|x+y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C\,;$$

b) si C est ouvert alors $C = \{x \in E \,/\, \|x\|_C < 1\}$;

c) la jauge de C est une application continue.

Démonstration. Remarquons que $\|\cdot\|_C$ est bien définie : pour tout $x \in E$ et pour tout t assez grand, comme C est un voisinage de 0 on a bien $\frac{1}{t}x \in C$.

a) On note que $\|0\|_C = 0$ (d'ailleurs $\|x\|_C = 0$ pour tout x tel que $\mathbb{R}^+x \subset C$). Par construction $\|\lambda x\|_C = \lambda \|x\|_C$ si $\lambda > 0$. Montrons la sous-additivité : soient $x, y \in E$ et $s, t > 0$ tels que $\dfrac{1}{s}x$ et $\dfrac{1}{t}y$ sont dans C. Soit $\sigma := \frac{s}{s+t} \in [0,1]$. Alors

$$\frac{1}{s+t}(x+y) = \sigma\frac{x}{s} + (1-\sigma)\frac{y}{t} \in C$$

car C est convexe. Donc

$$\|x+y\|_C \leq s+t\,.$$

En prenant l'inf sur s et t on en déduit le résultat.

b) Supposons que C est ouvert. Alors pour tout $x \in C$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x$ appartient à C. On en déduit que

$$\|x\|_C \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1\,.$$

Inversement si $x \in E$ est tel que $\|x\|_C < 1$, montrons que $x \in C$. Comme $\|x\|_C < 1$, il existe $t \in (0,1)$ tel que $\frac{1}{t}x \in C$, et donc on a

$$x = t\Big(\frac{1}{t}x\Big) + (1-t)0 \in C$$

puisque C est convexe, d'où le résultat.

c) On a par *a)*

$$\Big|\|x\|_C - \|y\|_C\Big| \leq \|x-y\|_C$$

donc il suffit de montrer la continuité en 0. Celle-ci provient du fait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe V_ε voisinage de 0 contenu dans εC. Pour tout $x \in V_\varepsilon$ on a $\|x\|_C \leq \varepsilon$, et le résultat suit. □

Théorème A.2.10. *Un espace vectoriel topologique est localement convexe si et seulement si sa topologie est définie par une famille de semi-normes.*

De même un espace vectoriel topologique admet un système fondamental dénombrable de voisinages convexes de l'origine (au sens où il existe une famille $V_0, \ldots, V_n, \ldots$ d'ouverts tels que tout voisinage de 0 contient l'un des V_n) si et seulement si sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes.

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe. On remarque que pour tout voisinage ouvert convexe C de 0, l'ensemble $C \cap -C$, qui est non vide, est aussi un voisinage ouvert convexe de 0, et il est de plus symétrique et contenu dans C. Soit donc $\mathcal{V}$ un système fondamental de voisinages ouverts de 0 pour $\mathcal{T}$, convexes et symétriques, et montrons que la topologie $\mathcal{P}$ définie par $(\|\cdot\|_C)_{C\in\mathcal{V}}$ (qui est bien une semi-norme puisque C est symétrique, et dénombrable si $\mathcal{V}$ l'est) coïncide avec la topologie originelle $\mathcal{T}$ de E. Il suffit de montrer que tout voisinage de 0 pour l'une est voisinage de 0 pour l'autre et réciproquement.

- Si $V \in \mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathcal{T}$ alors par le lemme précedent

$$V = \{x \in E \,/\, \|x\|_V < 1\}$$

donc tout voisinage ouvert de 0 pour $\mathcal{T}$ est un voisinage ouvert de 0 pour $\mathcal{P}$.

- Soit V un voisinage ouvert de 0 pour $\mathcal{P}$ et soit $v \in V$. Alors il existe $r > 0$, $k \geq 1$ et des éléments $C_1, \ldots, C_k$ de $\mathcal{V}$ tels que

$$\Big\{x \in E\,, \quad \|v - x\|_{C_i} < r \;\forall 1 \leq i \leq k\Big\} \subset V\,.$$

Mais alors le voisinage ouvert convexe de l'origine $C := \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} rC_i$ vérifie $v + C \subset V$ et C est dans $\mathcal{V}$ donc V est un voisinage ouvert de 0 pour $\mathcal{T}$.

$\Longleftarrow$ Soit E un espace vectoriel topologique, et $(p_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ une famille de semi-normes sur E. Alors les ensembles

$$\{x \in E \,/\, \forall \beta \in \mathcal{B}\,,\; p_\beta(x) < \varepsilon\}$$

où $\mathcal{B}$ est une partie finie de $\mathcal{A}$ et ε un réel strictement positif, forment un système fondamental de voisinages ouverts de 0 (dénombrable si la famille $\mathcal{A}$ l'est, et ε est rationnel) pour la topologie définie par ces semi-normes. Comme ces ensembles sont convexes par l'inégalité triangulaire, l'ensemble E muni de cette topologie est localement convexe.

□

Lemme A.2.11. *Soit E un espace vectoriel topologique réel et soit C un convexe ouvert non vide de E. Pour tout $x_0 \in E \setminus C$, il existe une forme linéaire continue ℓ sur E telle que*

$$\forall x \in C\,, \quad \ell(x) < \ell(x_0)\,.$$

Démonstration. Par linéarité de ℓ on peut supposer que $0 \in C$. Soit $F := \mathbb{R}x_0$ et soit $\|\cdot\|_C$ la jauge de C. Soit la forme linéaire

$$f : \begin{aligned} F &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda x_0 &\longmapsto \lambda\,. \end{aligned}$$

On sait par le lemme A.2.9 que $C = \{x \in E \,/\, \|x\|_C < 1\}$ donc comme $x_0 \notin C$, $\|x_0\|_C \geq 1$. On a donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad f(\lambda x_0) \leq \|\lambda x_0\|_C$$

(notons que pour $\lambda \leq 0$ c'est évident !).

Par le théorème de Hahn-Banach analytique il existe donc ℓ sur E prolongeant f, telle que $\ell \leq \|\cdot\|_C$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in \varepsilon C \cap (-\varepsilon C)$

$$|\ell(x)| = \ell((\operatorname{signe} \ell(x))\, x) \leq \big\|(\operatorname{signe} \ell(x))\, x\big\|_C \leq \varepsilon$$

car $(\operatorname{signe} \ell(x))\, x$ appartient à εC, donc ℓ est continue en 0 donc partout. De plus pour tout $x \in C$ on a

$$\ell(x) \leq \|x\|_C < 1$$

et comme $\ell(x_0) = f(x_0) = 1$ le lemme suit. □

A.2.3.3. *Énoncé et démonstration du théorème.*

Définition A.2.12. *Soit E un espace vectoriel topologique réel, et A et B deux sous-ensembles de E. On dit que l'hyperplan $H = [f = \alpha]$ sépare A et B si*

$$\forall x \in A\,, \quad f(x) \leq \alpha \quad \textit{et} \quad \forall x \in B\,, \quad f(x) \geq \alpha\,.$$

On dit que l'hyperplan $H = [f = \alpha]$ sépare strictement A et B s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in A\,, \quad f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \textit{et} \quad \forall x \in B\,, \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon\,.$$

Théorème A.2.13 (Hahn-Banach - forme géométrique)**.** *Soit E un espace vectoriel topologique réel, et A et B deux convexes non vides disjoints de E.*

a) Si A est ouvert alors il existe un hyperplan affine fermé séparant A et B ;

b) Si E est localement convexe, si A est compact et B est fermé, alors il existe un hyperplan affine fermé séparant strictement A et B.

Démonstration. *a)* Soit $C := \{x - y\,,\ x \in A\,, y \in B\}$, convexe et non vide (car c'est le cas pour A et B), et ouvert car

$$C = \bigcup_{y \in B} (A - y)$$

et ne contenant pas 0 car $A \cap B = \emptyset$. Par le Lemme A.2.11 avec $x_0 = 0$, il existe une forme linéaire continue ℓ sur E telle que $\ell(c) < 0$ pour tout $c \in C$. Alors $\ell(x) < \ell(y)$ pour tout $x \in A$ et $y \in B$. Soit $\alpha := \sup_{x \in A} \ell(x)$, alors

$$\alpha \leq \inf_{y \in B} \ell(y)$$

et donc $H = [\ell = \alpha]$ convient : il sépare A et B et est fermé car ℓ est continue (voir la Proposition A.2.6).

b) On a $A \cap B = \emptyset$ et B est fermé donc pour tout $x \in A$ il existe un voisinage ouvert V_x de 0 dans E tel que

$$(x + V_x) \cap B = \emptyset\,. \tag{A.6}$$

Par continuité de l'application $(x, y) \mapsto x + y$ en $(0, 0)$, on peut trouver V'_x voisinage ouvert de 0 dans E tel que $V'_x + V'_x \subset V_x$. Mais A est compact donc il existe $x_1, \dots, x_n$ dans A tels que $A \subset (x_1 + V'_{x_1}) \cup \dots \cup (x_n + V'_{x_n})$. Comme $V'_{x_1} \cap \dots \cap V'_{x_n}$ est un voisinage de 0 et E est localement convexe, il existe W voisinage ouvert convexe de 0 dans E tel que l'on ait $W + (-W) \subset V'_{x_1} \cap \dots \cap V'_{x_n}$ (par continuité de l'application $(x, y) \mapsto x - y$ en $(0, 0)$). Soient alors $A' := A + W$ et $B' := B + W$, ouverts convexes non vides dans E. Montrons que $A' \cap B' = \emptyset$. Si $a + w = b + w'$ avec $a \in A$, $b \in B$ et $w, w' \in W$, alors on peut écrire $a = x_i + v'_i$ avec $v'_i \in V'_{x_i}$ et alors $b = x_i + v'_i + w - w'$ qui appartient à $B \cap (x_i + V_{x_i})$, ce qui est en contradiction avec (A.6).

Donc $A' \cap B' = \emptyset$ et par *a)* il existe $H := [\ell = \alpha]$ hyperplan affine fermé séparant A' et B' : on a

$$\forall x \in A'\,, \quad \ell(x) \leq \alpha \quad \text{et} \quad \forall y \in B'\,, \quad \ell(y) \geq \alpha\,. \tag{A.7}$$

Mais alors

$$\forall (x, y, w, w') \in A \times B \times W \times W\,, \quad \ell(x + w) \leq \alpha \leq \ell(y + w')\,.$$

Il suffit alors de choisir w et w' tels que $\ell(w) = \varepsilon > 0$ et $w' = -w$, ce qui démontre le théorème puisque l'on obtient

$$\forall (x, y) \in A \times B \quad \ell(x) \leq \alpha - \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon \leq \ell(y)\,.$$

En choisissant $\alpha' = \alpha - \varepsilon/2$ on trouve que $H := [\ell = \alpha']$ sépare strictement A' et B'. □

Corollaire A.2.14. *Soit E un espace vectoriel topologique réel séparé et F un sous-espace vectoriel de E tel que $\overline{F} \neq E$. Alors il existe $f \in E^*$ non identiquement nulle telle que*

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in F\,.$$

Démonstration. Soit $x_0 \in E \setminus \overline{F}$. D'après le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique) il existe $f \in E^*$ non identiquement nulle et un réel α tels que l'hyperplan $[f = \alpha]$ sépare strictement $\overline{F}$ et $\{x_0\}$. On a ainsi

$$\forall x \in F\,, \quad f(x) < \alpha < f(x_0)$$

mais alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad \forall x \in F\,, \quad \lambda f(x) < \alpha$$

et donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$. Le corollaire est démontré. □

A.2.4. Application : théorème de Krein-Milman.

Exercice. Montrer qu'un ensemble est convexe si et seulement si il contient toutes les combinaisons convexes positives finies de ses éléments.

Définition A.2.15 (Enveloppe convexe, Enveloppe convexe fermée)**.** *Soit E un espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. L'enveloppe convexe $co(A)$ de A est le plus petit convexe contenant A. C'est donc l'ensemble de toutes les combinaisons convexes positives finies d'éléments de A, en d'autres termes*

$$co(A) := \Big\{ \sum_{j\in J} \theta_j x_j\,,\ J \text{ fini}\,,\ x_j \in A\,,\ \theta_j \geq 0\,,\ \sum_{j\in J} \theta_j = 1 \Big\}\,.$$

L'enveloppe convexe fermée $\overline{\mathrm{co}(A)}$ d'un ensemble A est le plus petit convexe fermé contenant A. De manière équivalente, c'est l'adhérence de l'enveloppe convexe de A.

Si l'espace ambiant est un Banach, l'enveloppe convexe fermée d'un compact est un compact.

Si A est convexe alors $A = \mathrm{co}(A)$.

Si A est fermé on n'a pas nécessairement $\mathrm{co}(A) = \overline{\mathrm{co}(A)}$. Par exemple

$$A = \{(0,0)\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0\,,\; xy = 1\big\}$$

est fermé mais

$$\mathrm{co}(A) = \{(0,0)\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0\,,\; y > 0\big\}$$

est ouvert.

Si A est compact on n'a pas non plus nécessairement $\mathrm{co}(A) = \overline{\mathrm{co}(A)}$ (prendre par exemple ℓ^2 et le compact A formé de 0 et de $(e_n/n)_{n\geq 1}$ avec (e_n) la base canonique de ℓ^2 : son enveloppe convexe n'est pas fermée puisque $\frac{6}{\pi^2}\sum \frac{1}{n^2}\frac{e_n}{n}$ est dans $\overline{\mathrm{co}(A)}$).

Définition A.2.16 (Partie extrémale, point extrémal)**.** *Soit K une partie d'un espace vectoriel E. On dit qu'un ensemble A est une partie extrémale de K si A est compacte, non vide et*

$$\forall (x,y) \in K^2\,, \quad \Big(\exists \theta \in (0,1)\,,\; \theta x + (1-\theta)y \in A\Big) \quad \Longrightarrow \quad (x,y) \in A^2\,.$$

On dit que x_0 est un point extrémal de K si $\{x_0\}$ est une partie extrémale.

En d'autres termes, un point extrémal n'est pas un point intérieur d'un segment entièrement inclus dans K. Par exemple les points extrémaux de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^d$ forment la sphère unité euclidienne. Les points extrémaux d'un pavé de $\mathbb{R}^d$ sont ses sommets.

Théorème A.2.17 (Krein-Milman, 1940)**.** *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, et K un convexe compact de E. Alors K coïncide avec l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E} := \big\{\text{points extrémaux de } K\big\}$. On va commencer par montrer que $\mathcal{E}$ est non vide, puis que $K = \overline{\mathrm{co}(\mathcal{E})}$ où $\mathrm{co}(\mathcal{E})$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{E}$.

- Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties extrémales de K. Alors $\mathcal{P}$ est non vide car il contient K. On munit $\mathcal{P}$ de la relation d'ordre partielle $A \prec B$ si $B \subset A$. Montrons que $\mathcal{P}$ est inductif. Soit $\hat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ totalement ordonné, alors $\displaystyle\bigcap_{A\in\hat{\mathcal{P}}} A$ est une partie extrémale non vide, comme intersection de fermés emboîtés dans un compact, qui majore $\hat{\mathcal{P}}$, donc $\mathcal{P}$ est inductif. D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{P}$ admet un élément maximal M. Montrons que M est réduit à un point : s'il existe $x_0 \neq x_1$ dans M, alors d'après le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique), il existe une forme linéaire continue $f \in E^*$ telle que $f(x_0) < f(x_1)$. Soit

$$\widetilde{M} := \big\{x \in M \,/\, f(x) = \inf_M f\big\}\,.$$

Alors $\widetilde{M}$ est non vide car M est compact (comme partie extrémale) et f est continue, et $\widetilde{M}$ est compact car fermé dans un compact. Par ailleurs $\widetilde{M} \subset M$ et cette inclusion est stricte car $f(x_0) < f(x_1)$. Montrons que $\widetilde{M}$ est extrémal, ce qui aboutira à une contradicton : supposons qu'il existe $x, y \in K$ et $\theta \in (0,1)$ tels que

$$\theta x + (1-\theta)y \in \widetilde{M}\,.$$

Alors $\theta x + (1-\theta)y \in M$ donc $x, y \in M$. Par ailleurs

$$\theta f(x) + (1-\theta) f(y) = \inf_M f$$

ce qui implique que $x, y \in \widetilde{M}$. Mais M est extrémal et $M \neq \widetilde{M}$, d'où la contradiction. Donc M est reduit à un point, qui est un point extrémal. Donc $\mathcal{E}$ est non vide.

- On sait que $\overline{\mathrm{co}(\mathcal{E})} \subset K$, supposons qu'il existe $x_0 \in K \setminus \overline{\mathrm{co}(\mathcal{E})}$. On applique à nouveau le théorème de Hahn-Banach géométrique, qui implique qu'il existe une forme linéaire continue $f \in E^*$ telle que

$$\sup \Big\{ f(x) \,/\, x \in \overline{\mathrm{co}(\mathcal{E})} \Big\} < f(x_0) \, .$$

Soit alors

$$A := \Big\{ x \in K \,/\, f(x) = \sup_K f \Big\} \, .$$

On peut reproduire l'argument précédent concernant $\widetilde{M}$ pour montrer que A est extrémal. De même en considérant l'ensemble $\mathcal{P}_A$ des parties extrémales de K incluses dans A on montre comme ci-dessus qu'il admet un élément maximal réduit à un point, noté x_1, qui appartient donc à $\mathcal{E}$. On a $f(x_1) = \sup_K f$ et donc $f(x_0) \leq f(x_1)$. Mais par ailleurs comme $x_1 \in \mathcal{E}$ on a

$$f(x_1) \leq \sup \Big\{ f(x) \,/\, x \in \overline{\mathrm{co}(\mathcal{E})} \Big\} \, ,$$

d'où une contradiction. Le théorème est démontré. □

A.3. Dualité et topologies faibles

A.3.1. Premières définitions. Soient E et F deux espaces vectoriels réels et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire de $F \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$(\forall f \in F \, , \quad \langle f, x \rangle = 0) \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \, . \tag{A.8}$$

On peut définir une topologie d'espace vectoriel localement convexe séparé sur E en considérant pour toute partie finie B de F

$$p_B : \quad \begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \sup_{f \in B} |\langle f, x \rangle| \, . \end{aligned} \tag{A.9}$$

De même si

$$(\forall x \in E \, , \quad \langle f, x \rangle = 0) \quad \Longrightarrow \quad f = 0 \, , \tag{A.10}$$

alors on peut définir une topologie d'espace vectoriel localement convexe séparé sur F en considérant pour toute partie finie A de E,

$$q_A : \quad \begin{aligned} F &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \sup_{x \in A} |\langle f, x \rangle| \, . \end{aligned} \tag{A.11}$$

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. On considère l'ensemble E^* des formes linéaires continues sur E, et la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} E \times E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, f) &\longmapsto \langle f, x \rangle := f(x) \, . \end{aligned}$$

Grâce au théorème de Hahn-Banach (géométrique), la relation (A.8) est vérifiée. En effet pour tout $x \neq 0$ dans E, il existe $f \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle f, x \rangle < \alpha < 0 \, .$$

On peut donc comme ci-dessus définir une nouvelle topologie sur E, que l'on note $\sigma(E, E^*)$.

De même si $f \neq 0$ appartient à E^* alors il existe $x \in E$ tel que $\langle f, x\rangle \neq 0$ donc (A.10) est vérifiée. On peut donc définir une nouvelle topologie sur E^*, que l'on note $\sigma(E^*, E)$ — cette dernière ne nécessitant pas Hahn-Banach pour être construite.

Théorème A.3.1. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe, que l'on suppose séparé, défini par ses ouverts $\mathcal{T}$. La topologie $\sigma(E, E^*)$ est moins fine que $\mathcal{T}$.*

Démonstration. D'après le théorème A.2.10 la topologie $\mathcal{T}$ est définie par une famille de semi-normes que l'on note $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$.

Soit U ouvert pour $\sigma(E, E^*)$, montrons qu'il est ouvert pour $\mathcal{T}$. Soit $x_0 \in U$, il existe B partie finie de E^* et $r > 0$ tels que avec la notation (A.9),

$$p_B(x - x_0) < r \Longrightarrow x \in U\,.$$

Chaque élément f de B est continu de $(E, \mathcal{P})$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et comme B est finie, ses éléments forment une famille uniformément continue. Il existe donc une constante $C > 0$ et un sous-ensemble fini $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ tel que

$$\forall x \in E\,,\ \forall f \in B\,, \quad |\langle f, x - x_0\rangle| \leq C \sum_{\alpha\in\mathcal{A}'} p_\alpha(x - x_0)\,.$$

Alors la boule ouverte $B_{\mathcal{A}'}(x_0, r/2C|\mathcal{A}'|)$ est incluse dans U, donc U est ouvert pour la topologie initiale. Le théorème est démontré. □

A.3.2. Topologies faibles et espaces de Banach. Soit E un espace vectoriel normé, on rappelle que E^* est un espace vectoriel normé muni de la norme duale

$$\|f\|_{E^*} := \sup_{x\neq 0} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|_E}\,.$$

Définition A.3.2. *Soit E un espace de Banach.*

— *La topologie associée à $\|\cdot\|_E$ est dite topologie forte sur E*

— *La topologie $\sigma(E, E^*)$ est dite topologie faible sur E.*

— *La topologie $\sigma(E^*, E)$ est dite topologie faible $*$ sur E.*

Remarque. On rappelle que $E \subset E^{**}$ (voir notamment la Proposition A.3.10 ci-dessous ; on verra plus bas des exemples où l'inclusion est stricte) donc $\sigma(E^*, E)$ est moins fine que $\sigma(E^*, E^{**})$ (et donc la topologie faible $*$ sur E est moins fine que la topologie faible sur E^*).

Proposition A.3.3. *Soit E un espace de Banach.*

a) Si (x_n) converge fortement vers x dans E (on écrit $x_n \to x$) alors (x_n) converge faiblement vers x dans E (on écrit $x_n \rightharpoonup x$).

b) Si (x_n) converge faiblement vers x dans E alors (x_n) est bornée dans E et

$$\|x\|_E \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E\,. \tag{A.12}$$

c) Si (x_n) converge faiblement vers x dans E et (f_n) converge fortement vers f dans E^* alors

$$\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle\,.$$

Démonstration. *a)* résulte de la comparaison entre topologie forte et faible précédente, ou encore de la continuité de $f \in E^*$: on a en effet

$$|\langle f, x_n - x\rangle| \leq \|f\|_{E^*}\|x_n - x\|_E\,.$$

b) provient du Corollaire A.1.15 du Théorème de Banach-Steinhaus A.1.13. Plus précisément on associe à x_n l'application linéaire

$$T_n : \begin{array}{l} E^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \langle f, x_n \rangle \,, \end{array}$$

et on sait que la suite réelle $(T_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour toute $f \in E^*$. Le théorème de Banach-Steinhaus assure donc qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $f \in E^*$.

$$|T_n f| \leq C\|f\|_{E^*} \,.$$

En rappelant la Proposition A.2.4, on a donc

$$\|x_n\|_E = \sup_{\|f\|_{E^*}\leq 1} |T_n f| \leq C \,.$$

Pour démontrer l'inégalité (A.12) on écrit

$$|\langle f, x_n \rangle| \leq \|f\|_{E^*}\|x_n\|_E$$

donc

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{E^*} \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E$$

et finalement

$$\|x\|_E = \sup_{\|f\|_{E^*}\leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E \,.$$

c) découle de l'inégalité triangulaire et des résultats précédents, puisque

$$|\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \leq \ |\langle f_n - f, x_n \rangle + \langle f, x_n - x \rangle| \leq \|f_n - f\|_{E^*}\|x_n\|_E + \ |\langle f, x_n - x \rangle| \,.$$

La proposition est démontrée. □

Proposition A.3.4. *Soit E est un espace de Banach de dimension finie. Alors la topologie $\sigma(E, E^*)$ coïncide avec $\mathcal{T}$. En particulier $x_n \rightharpoonup x$ si et seulement si $x_n \to x$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que tout ouvert pour la topologie forte est ouvert pour la topologie faible. Soit $x_0 \in E$ et U un voisinage de x_0 pour la topologie forte. Alors U contient la boule $B_E(x_0, r)$ pour un certain $r > 0$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ sa base duale (c'est-à-dire vérifiant que $\langle f_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} := 1$ si $i = j$, et 0 sinon). Puisqu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E \,, \quad \|x\|_E \leq C \max_{1\leq i\leq n} |\langle f_i, x \rangle| \,.$$

Alors l'ouvert

$$V := \Big\{ x \in E \,/\, |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \frac{r}{C} \,,\ \forall i \in [1, n] \Big\}$$

est inclus dans $B_E(x_0, r)$ et le résultat suit. □

Exercice. Soit E un espace de Banach de dimension infinie et soit

$$S := \Big\{ x \in E \,/\, \|x\|_E = 1 \Big\} \,.$$

Alors la fermeture de S pour la topologie faible est

$$B := \Big\{ x \in E \,/\, \|x\|_E \leq 1 \Big\} \,.$$

Il existe donc toujours des fermés pour la topologie forte qui ne sont pas fermés pour la topologie faible, et ces deux topologies sont donc bien distinctes.

Théorème A.3.5. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe, que l'on suppose séparé. Si C est un convexe fermé de E pour $\mathcal{T}$, alors il est aussi fermé pour $\sigma(E, E^*)$, et réciproquement.*

Démonstration. Montrons le seul sens non évident (d'après le théorème A.3.1) : soit C un convexe fermé de E pour $\mathcal{T}$, montrons que le complémentaire de C dans E est ouvert pour $\sigma(E, E^*)$. Soit $x_0 \notin C$. Par le théorème de Hahn-Banach il existe un hyperplan qui sépare strictement $\{x_0\}$ et C. Donc il existe $f \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle f, x_0 \rangle < \alpha < \langle f, y \rangle$$

pour tout $y \in C$. Soit

$$V := \Big\{ x \in E \,/\, \langle f, x \rangle < \alpha \Big\}.$$

Alors $x_0 \in V$, V est inclus dans le complémentaire de C et V est ouvert pour $\sigma(E, E^*)$, ce qui démontre le théorème. $\square$

Corollaire A.3.6 (Lemme de Mazur, 1905-1981)**.** *Soit E un espace de Banach. Si (x_n) converge faiblement vers x dans E, alors pour tout n il existe y_n, combinaison convexe des x_n, tel que la suite (y_n) converge fortement vers x.*

Démonstration. Soit $C := \mathrm{co}(\bigcup_{n\geq 1} \{x_n\})$ l'enveloppe convexe des (x_n). Alors son adhérence (forte) $\overline{C}$ est convexe, donc fermée pour la topologie faible par le théorème A.3.5. Donc $\overline{C}$ contient la fermeture faible de C, qui contient x par hypothèse. Donc x appartient à sa fermeture forte. $\square$

Proposition A.3.7. *Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E dans F. L'application T est continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$ si et seulement si elle est continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ dans $(F, \sigma(F, F^*))$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit $T : E \to F$ linéaire continue pour la topologie forte. Soit V un ouvert de la topologie $\sigma(F, F^*)$, montrons que $T^{-1}(V)$ est ouvert dans E pour la topologie $\sigma(E, E^*)$. Soit donc $x_0 \in T^{-1}(V)$, comme $Tx_0 \in V$, il existe I fini, des formes linéaires $(f_i)_{i\in I}$ sur F et des réels $(r_i)_{i\in I}$ tels que V contient les ensembles

$$\Big\{ y \in F \,/\, |\langle f_i, y - Tx_0 \rangle| < r_i \,,\ \forall i \in I \Big\}.$$

On remarque alors que l'ensemble

$$U := \Big\{ x \in E \,/\, |\langle f_i, T(x - x_0) \rangle| < r_i \,,\ \forall i \in I \Big\}$$

vérifie $U \subset T^{-1}(V)$. Comme T est continue pour la topologie forte, on a que $f_i \circ T$ est une forme linéaire continue sur E est donc U est un voisinage ouvert de x_0 pour $\sigma(E, E^*)$.

$\Longleftarrow$ Par le théorème du graphe fermé il suffit de montrer que le graphe de T est fermé pour la topologie forte. Soit donc une suite (x_n) telle que $(x_n, T(x_n)) \to (x, y) \in E \times F$ et montrons que $y = Tx$. On a $x_n \to x$ donc $x_n \rightharpoonup x$, et $Tx_n \to y$ donc $Tx_n \rightharpoonup y$. On a donc en particulier $Tx_n \rightharpoonup Tx$, et la topologie faible étant séparée il y a unicité de la limite donc $y = Tx$. $\square$

On admet le théorème suivant de Tychonov (qui repose sur le lemme de Zorn) : le produit cartésien d'une famille quelconque d'ensembles compacts est compact pour la topologie produit (i.e. la topologie qui rend continues toutes les projections sur l'une des composantes du produit). Plus précisément on a le théorème suivant.

Théorème A.3.8 (Tychonov, 1930)**.** *Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ une famille d'espaces topologiques et soit*

$$X := \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha := \Big\{(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \,/\, \forall\alpha\in\mathcal{A}\,,\ x_\alpha\in X_\alpha\Big\}\,.$$

On munit X de la topologie la moins fine rendant continues toutes les projections canoniques

$$P_\beta : \begin{array}{l} X \longrightarrow X_\beta \\ (x_\alpha) \longmapsto x_\beta\,. \end{array}$$

Si pour tout $\alpha\in\mathcal{A}$, X_α est compact, alors X l'est aussi.

Théorème A.3.9 (Banach-Alaoglu, 1938)**.** *Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité fermée de E^**

$$B_{E^*} := \Big\{f\in E^* \,/\, |f(x)| \le \|x\|_E \quad \forall x\in E\Big\}$$

est compacte pour la topologie faible $*$.

Démonstration. Avec les notations du théorème de Tychonov, on pose $\mathcal{A}=E$ et $X_\alpha=\mathbb{R}$ pour tout $\alpha\in\mathcal{A}$. On identifie $X := \prod_{x\in E}\mathbb{R} = \mathbb{R}^E$ à l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ via l'application (bijective)

$$\Phi : \begin{array}{r} \mathcal{F}(E,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^E \\ f \longmapsto \{f(x)\}_{x\in E}\,. \end{array}$$

Les éléments de $\mathbb{R}^E$ sont notés $\omega=(\omega_x)_{x\in E}$. Les projections canoniques sont donc, pour tout $x\in E$,

$$P_x : \begin{array}{r} \mathbb{R}^E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \longmapsto \omega_x\,. \end{array}$$

Soit Ψ la bijection réciproque de Φ, restreinte à $\Phi(E^*)$:

$$\Psi : \begin{array}{r} \Phi(E^*)\subset\mathbb{R}^E \longrightarrow \mathcal{F}(E,\mathbb{R}) \\ \omega \longmapsto f \quad t.q. \quad f(x)=\omega_x \ \ \forall x\in E\,. \end{array}$$

Montrons tout d'abord que Ψ est continue de $\Phi(E^*)$ (muni de la topologie produit de $\mathbb{R}^E$) dans E^* (muni de la topologie faible $*$) : il suffit de vérifier que pour tout $x\in E$, l'application

$$\Lambda_x : \begin{array}{r} \Phi(E^*) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \longmapsto \Psi(\omega)(x) \end{array}$$

est continue. On a $\Lambda_x(\Phi(f)) = f(x) = P_x(\Phi(f))$ pour tout $f\in E^*$ donc

$$\Lambda_x = P_{x|\Phi(E^*)}$$

et le résultat suit du fait que P_x est continue.

Pour démontrer le théorème, il suffit alors de montrer que la boule unité fermée de E^* est l'image par Ψ d'un compact de $\mathbb{R}^E$. Soit

$$K := \Big\{\omega\in\mathbb{R}^E \,/\, \forall x\in E\,, |\omega_x| \le \|x\|_E\Big\}\,.$$

Alors

$$K = \prod_{x\in E}\Big[-\|x\|_E, \|x\|_E\Big]$$

donc K est compact par le théorème de Tychonov. Soit enfin

$$F := \Big\{\omega\in\mathbb{R}^E \,/\, \forall(x,y)\in E\times E\,, \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\,,\ \omega_{\lambda x+\mu y} = \lambda\omega_x + \mu\omega_y\Big\}\,.$$

Pour $(x,y) \in E \times E$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ donnés, l'application

$$\Lambda^{\lambda,\mu}_{x,y} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \longmapsto \omega_{\lambda x+\mu y} - \lambda\omega_x - \mu\omega_y \end{array}$$

est continue. L'ensemble F est l'intersection de l'image réciproque de $\{0\}$ par des fonctions continues, donc $K \cap F$ est compact. Comme

$$B_{E^*} = \Psi(K \cap F)$$

on a le résultat cherché. Le théorème est démontré. □

A.3.3. Espaces réflexifs. Pour tout espace de Banach E on note son bidual par E^{**}, muni de la norme

$$\|\xi\|_{E^{**}} := \sup_{\|f\|_{E^*}\leq 1} |\langle \xi, f\rangle| \,.$$

Proposition A.3.10. *Soit E un espace de Banach et E^{**} son bidual. L'injection canonique de E dans E^{**} définie par*

$$j : \begin{array}{l} E \longrightarrow E^{**} \\ x \longmapsto j(x) : \begin{array}{l} E^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \langle j(x), f\rangle := \langle f, x\rangle \end{array} \end{array}$$

est une isométrie. En particulier $j(B_E)$ est fermée dans $B_{E^{**}}$ pour la topologie forte de E^{**}.

Démonstration. Pour montrer que j est une isométrie, il suffit de remarquer que

$$\|j(x)\|_{E^{**}} = \sup_{\|f\|_{E^*}\leq 1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|_E$$

grâce à la Proposition A.2.4. Le fait que $j(B_E)$ soit fermée dans $B_{E^{**}}$ pour la topologie forte de E^{**} provient alors du fait que B_E est complet et que j est une isométrie. □

Définition A.3.11. *Soit E un espace de Banach. On dit que E est réflexif s'il est le dual de son dual, i.e. si j est surjective (donc bijective).*

Théorème A.3.12 (Kakutani, 1941)**.** *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si sa boule unité fermée B_E est compacte pour $\sigma(E,E^*)$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ On sait que $B_{E^{**}}$ est compacte pour la topologie de $\sigma(E^{**},E^*)$ grâce au théorème de Banach-Alaoglu A.3.9. Comme $j(B_E) = B_{E^{**}}$, il suffit de montrer que j^{-1} est continue de $(E^{**}, \sigma(E^{**},E^*))$ dans $(E, \sigma(E,E^*))$. Si U est un ouvert pour $\sigma(E,E^*)$, montrons que $j(U)$ est un ouvert de E^{**} pour $\sigma(E^{**},E^*)$. Soit $x_0 \in U$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1, \ldots, f_n \in E^*$ telles que

$$V := \Big\{ x \in E \, / \sup_{1\leq i\leq n} |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon \Big\} \subset U \,.$$

Alors

$$j(V) = \Big\{ \xi \in E^{**} \, / \, \xi = j(x) \text{ et } \sup_{1\leq i\leq n} |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon \Big\}$$

et comme

$$\langle \xi, f_i\rangle = \langle f_i, x\rangle \quad \text{si} \quad \xi = j(x)$$

alors

$$j(V) = \Big\{ \xi \in E^{**} \, / \sup_{1\leq i\leq n} |\langle \xi - j(x_0), f_i\rangle| < \varepsilon \Big\} \,,$$

ce qui démontre le résultat.

$\Longleftarrow$ On utilise le lemme suivant, que l'on démontrera plus bas.

Lemme A.3.13 (Goldstine $\sim$ 1930)**.** *Soit E un espace de Banach, alors $j(B_E)$ est dense dans $B_{E^{**}}$ pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$ (et donc $j(E)$ est dense dans E^{**} pour cette même topologie).*

Retournons à la démonstration du théorème. Supposons donc que B_E est faiblement compacte, et montrons que $j(E) = E^{**}$. Comme j est une isométrie de E sur E^{**}, elle est continue de l'espace $(E, \sigma(E, E^*))$ dans l'espace $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^{***}))$ d'après la Proposition A.3.7, mais alors aussi dans $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ puisque cette dernière topologie est moins fine que $\sigma(E^{**}, E^{***})$. Comme B_E est faiblement compacte, alors $j(B_E)$ est compacte pour $\sigma(E^{**}, E^*)$. Par le lemme de Goldstine A.3.13 on a donc $j(B_E) = B_{E^{**}}$ puisqu'il est dense, et fermé dans E^{**}. Le résultat est démontré. □

Démonstration du lemme de Goldstine A.3.13. Cette démonstration nécessite le lemme suivant, admis pour l'instant.

Lemme A.3.14 (Helly $\sim$ 1920)**.** *Soit E un espace de Banach, soient $f_1, \ldots, f_n$ dans E^* et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in B_E$ tel que pour tout $i \in [1, n]$,

$$|f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon\,;$$

b) Pour tous $\beta_1, \ldots, \beta_n$ réels,

$$\Big|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i\Big| \leq \Big\|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\Big\|_{E^*}.$$

Retournons à la démonstration du lemme de Goldstine A.3.13. Soit $\xi \in B_{E^{**}}$ et V un voisinage de ξ pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$. Il s'agit de montrer que $V \cap j(B_E) \neq \emptyset$. On peut toujours supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1, \ldots, f_n$ dans E^* tels que V contient

$$V' := \Big\{\eta \in E^{**} \,/\, |\langle \eta - \xi, f_i\rangle| < \varepsilon\,, \quad \forall i \in [1, n]\Big\}.$$

Donc on cherche $x \in B_E$ tel que $j(x) \in V'$, donc (en rappelant que $\langle j(x), f_i\rangle = \langle f_i, x\rangle$) tel que

$$\big|\langle f_i, x\rangle - \langle \xi, f_i\rangle\big| < \varepsilon\,, \quad \forall i \in [1, n]\,.$$

On pose $\alpha_i := \langle \xi, f_i\rangle$, alors par le lemme de Helly A.3.14 il suffit de montrer que

$$\forall \beta_1\,, \ldots\,, \beta_n \text{ réels}\,, \quad \Big|\sum_i \beta_i \alpha_i\Big| \leq \Big\|\sum_i \beta_i f_i\Big\|_{E^*}$$

ce qui est évident puisque

$$\sum_i \beta_i \alpha_i = \langle \xi, \sum_i \beta_i f_i\rangle$$

et $\|\xi\|_{E^{**}} \leq 1$. Le lemme A.3.13 est donc démontré. □

Démonstration du lemme de Helly A.3.14. $\Longrightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et n réels $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Alors

$$\Big|\sum_i^n \beta_i \alpha_i\Big| \leq \Big|\sum_i^n \beta_i(\alpha_i - f_i(x_\varepsilon))\Big| + \Big|\sum_i^n \beta_i f_i(x_\varepsilon)\Big|$$

donc

$$\begin{aligned}\Big|\sum_i^n \beta_i \alpha_i\Big| &\leq \varepsilon \sum_i^n |\beta_i| + \Big|\sum_i^n \beta_i f_i(x_\varepsilon)\Big| \\ &\leq \varepsilon \sum_i^n |\beta_i| + \Big\|\sum_i^n \beta_i f_i\Big\|_{E^*} \|x_\varepsilon\|_E\end{aligned}$$

et on conclut en faisant tendre ε vers zéro (en utilisant $\|x_\varepsilon\|_E \leq 1$).

$\Longleftarrow$ On considère

$$\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto \Big(\langle f_1, x\rangle, \dots, \langle f_n, x\rangle\Big) . \end{array}$$

L'assertion *a)* signifie que $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \overline{\varphi(B_E)}$, donc par contraposition supposons que $\alpha \notin \overline{\varphi(B_E)}$. Comme $\overline{\varphi(B_E)}$ est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, on déduit du théorème de Hahn-Banach (forme géométrique) qu'il existe $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\beta \cdot \varphi(x) < \gamma < \beta \cdot \alpha \, , \quad \forall x \in B_E \, .$$

Mais

$$\| \sum_i^n \beta_i f_i \|_{E^*} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \sum_i^n \beta_i \langle f_i, x\rangle = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \beta \cdot \varphi(x)$$

donc

$$\| \sum_i^n \beta_i f_i \|_{E^*} \leq \gamma < \sum_i^n \beta_i \alpha_i \, ,$$

contradiction. Le lemme est donc démontré. □

Exercice. Si T est une isométrie surjective entre deux espaces de Banach F et G, alors F est réflexif si et seulement si G est réflexif.

Exercice. Les espaces c_0 des suites nulles à l'infini, ℓ^1 des suites sommables et ℓ^∞ des suites bornées ne sont pas réflexifs.

Proposition A.3.15. *Soit E un espace de Banach réflexif, et M un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors M (muni de la norme induite de E) est réflexif.*

Démonstration. D'après le théorème de Kakutani A.3.12 il s'agit de vérifier que la boule unité fermée B_M est compacte pour la topologie $\sigma(M, M^*)$, dont on vérifie sans peine qu'elle est la trace sur M de la topologie $\sigma(E, E^*)$. Mais B_E est compacte pour la topologie $\sigma(E, E^*)$ et M est fermée pour la topologie $\sigma(E, E^*)$ par le théorème A.3.5, donc B_M est compacte pour la topologie $\sigma(E, E^*)$ et donc pour la topologie $\sigma(M, M^*)$. La proposition est démontrée. □

Proposition A.3.16. *Soit E un espace de Banach, on a*

$$E \quad \textit{réflexif} \quad \Longleftrightarrow \quad E^* \quad \textit{réflexif} .$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ On sait par le théorème de Banach-Alaoglu A.3.9 que B_{E^*} est compacte pour la topologie $\sigma(E^*, E)$. Comme E est réflexif les topologies $\sigma(E^*, E)$ et $\sigma(E^*, E^{**})$ coïncident donc B_{E^*} est compacte pour la topologie $\sigma(E^*, E^{**})$ et donc E^* est réflexif par le théorème de Kakutani A.3.12.

$\Longleftarrow$ Supposons que E^* est réflexif, alors par l'étape précédente on sait que E^{**} est réflexif, et donc $j(E)$ est réflexif comme sous-espace fermé de E^{**} d'après la Proposition A.3.15 et donc E est réflexif puisque j^{-1} est un isomorphisme isométrique entre $j(E)$ et E. □

A.3.4. Uniforme convexité.

Définition A.3.17. *Un espace vectoriel normé E est uniformément convexe si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tous x, y dans B_E,*

$$\Big\|\frac{1}{2}(x+y)\Big\|_E \geq 1-\delta \quad \Longrightarrow \quad \|x-y\|_E \leq \varepsilon\,.$$

Exemples. a) L'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|x\|_{\ell^2} := \sqrt{x_1^2+x_2^2}$ est uniformément convexe mais pas s'il est muni des normes $\|x\|_{\ell^1}$ et $\|x\|_{\ell^\infty}$.

b) On verra au paragraphe A.3.6 que L^p muni de sa norme naturelle est uniformément convexe si $1 < p < \infty$.

Théorème A.3.18 (Milman-Pettis 1938)**.** *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Démonstration. Soit E un espace de Banach uniformément convexe, il s'agit de démontrer que $j(E) = E^{**}$, ou encore que $j(B_E) = B_{E^{**}}$. On rappelle (voir la Proposition A.3.10) que $j(B_E)$ est fermée dans $B_{E^{**}}$ pour la topologie forte, il suffit donc de montrer qu'elle est dense dans $B_{E^{**}}$ pour cette même topologie. Par homogénéité on peut se ramener à

$$S_{E^{**}} := \Big\{\xi \in E^{**} \,/\, \|\xi\|_{E^{**}} = 1\Big\}\,.$$

Soit donc $\xi \in S_{E^{**}}$ et soit $\varepsilon > 0$ auquel on associe le paramètre δ de la Définition A.3.17. Montrons qu'il existe $x \in B_E$ tel que

$$\|j(x)-\xi\|_{E^{**}} \leq \varepsilon\,. \tag{A.13}$$

Comme $\|\xi\|_{E^{**}} = 1$, il existe $f \in E^*$ tel que $\|f\|_{E^*} = 1$ et

$$\langle \xi, f\rangle \geq 1-\frac{\delta}{2}\,\cdot \tag{A.14}$$

Soit le voisinage ouvert de ξ pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$

$$V := \Big\{\eta \in E^{**} \,/\, \Big|\langle \xi-\eta, f\rangle\Big| < \frac{\delta}{2}\Big\}\,.$$

On sait par le lemme de Goldstine A.3.13 que $j(B_E)$ est dense dans $B_{E^{**}}$ pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$, donc il existe $x \in B_E$ tel que $j(x) \in V$. En écrivant $\Big|\langle j(x)-\xi, f\rangle\Big| < \delta/2)$, il vient

$$\Big|\langle \xi, f\rangle - \langle f, x\rangle\Big| < \frac{\delta}{2} \tag{A.15}$$

Montrons que $\|j(x)-\xi\|_{E^{**}} \leq \varepsilon$ par contradiction.

Supposons que $\|j(x)-\xi\|_{E^{**}} > \varepsilon$, alors $\xi \in W := {}^c\big(j(x)+\varepsilon B_{E^{**}}\big)$ et W est un voisinage de ξ pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$ (puisque $B_{E^{**}}$ est fermé pour cette topologie par le théorème de Banach-Alaoglu). Par le lemme de Goldstine A.3.13 à nouveau, il existe $y \in B_E$ tel que $j(y) \in W \cap V$ et donc

$$\Big|\langle \xi, f\rangle - \langle f, y\rangle\Big| < \frac{\delta}{2}\,\cdot \tag{A.16}$$

Notons que par construction, puisque $j(y) \in W$ on a

$$\|j(x-y)\|_{E^{**}} > \varepsilon\,. \tag{A.17}$$

Par l'inégalité triangulaire on conclut de (A.15) et (A.16) que

$$2\langle \xi, f\rangle < \langle f, x+y\rangle + \delta \leq \|x+y\|_E + \delta\,.$$

Mais alors par (A.14) il vient

$$\frac{1}{2}\|x+y\|_E > 1-\delta$$

et donc $\|x-y\|_E \leq \varepsilon$ par uniforme convexité, ce qui contredit (A.17). D'où le résultat. □

Remarque. Les espaces vectoriels de dimension finie sont réflexifs.

Proposition A.3.19. *Soit E un espace de Banach uniformément convexe et soit (x_n) une suite de E convergeant faiblement pour $\sigma(E,E^*)$ vers x. Si*

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_E \leq \|x\|_E\,,$$

alors (x_n) converge fortement vers x.

Démonstration. On peut toujours supposer que $x \neq 0$, sinon le résultat est évident. Soit $\lambda_n := \max(\|x\|_E, \|x_n\|_E)$, soit $y_n := \lambda_n^{-1} x_n$ et $y = \|x\|_E^{-1} x$. Alors $\lambda_n \to \|x\|_E$ et $y_n \rightharpoonup y$ faiblement $\sigma(E,E^*)$. Par la Proposition A.3.3 on a puisque $\frac{1}{2}(y_n+y) \rightharpoonup y$,

$$\|y\|_E \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|y_n+y\|_E\,.$$

Mais $\|y\|_E = 1$ et $\|y_n\|_E \leq 1$ donc on déduit que nécessairement

$$\frac{1}{2}\|y_n+y\|_E \to 1\,.$$

Par uniforme convexité on a donc

$$\|y_n-y\|_E \to 0\,,$$

d'où la proposition. □

A.3.5. Espaces séparables.

Définition A.3.20. *On dit qu'un espace métrique X est séparable s'il existe un sous-ensemble dénombrable dense dans X.*

Proposition A.3.21. *Soit E un espace de Banach. Si E^* est séparable alors E est séparable.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E^* et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que

$$\|x_n\|_E = 1 \quad \text{et} \quad \langle f_n, x_n\rangle \geq \frac{1}{2}\|f_n\|_{E^*}\,.$$

Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels des x_n. Alors F est dénombrable, montrons qu'il est dense dans E. Par le corollaire A.2.14 du théorème de Hahn-Banach il suffit de montrer que toute forme linéaire $f \in E^*$ qui s'annule sur F est identiquement nulle. Soit donc f une telle forme linéaire, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f-f_n\|_{E^*} \leq \varepsilon\,.$$

On écrit alors, puisque f s'annule sur F,

$$\frac{1}{2}\|f_n\|_{E^*} \leq \langle f_n, x_n\rangle = \langle f_n - f, x_n\rangle \leq \varepsilon\,,$$

et donc

$$\|f\|_{E^*} \leq \|f-f_n\|_{E^*} + \|f_n\|_{E^*} \leq 3\varepsilon$$

et donc f est identiquement nulle. La proposition est démontrée. □

Corollaire A.3.22. *Soit E un espace de Banach. On a*

$$E \quad \textit{réflexif et séparable} \quad \Longleftrightarrow \quad E^* \quad \textit{réflexif et séparable}\,.$$

Démonstration. $\Longleftarrow$ provient des Propositions A.3.16 et A.3.21.

$\Longrightarrow$ est dû au fait que si E est réflexif et séparable alors E^{**} l'est aussi, et donc E^* aussi. $\square$

Exercice. Soit E un espace de Banach de dimension infinie, alors E n'est jamais métrisable pour la topologie $\sigma(E, E^*)$, et E^* n'est jamais métrisable pour la topologie $\sigma(E^*, E)$.

Théorème A.3.23. *Soit E un espace de Banach. Alors E est séparable si et seulement si B_{E^*} est métrisable pour la topologie $\sigma(E^*, E)$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans B_E, on définit la métrique suivante sur B_{E^*} :

$$\forall (f,g) \in B_{E^*} \times B_{E^*}\,, \quad d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\langle f-g, x_n\rangle|\,.$$

Montrons que la topologie associée à d coïncide avec $\sigma(E^*, E)$ sur B_{E^*}.

- soit $f \in B_{E^*}$, soit $r > 0$ un réel, $p \geq 1$ un entier et soit

$$V := \Big\{ g \in B_{E^*} \,/\, |\langle f-g, y_i\rangle| < r\,,\ \forall i \in \{1,\dots,p\}\Big\}$$

un voisinage de f pour $\sigma(E^*, E)$, avec (sans perte de généralité) $y_i \in B_E$ pour tout i dans $\{1,\dots,p\}$. Montrons qu'il existe $r' > 0$ tel que

$$U := \Big\{ g \in B_{E^*} \,/\, d(f,g) < r'\Big\} \subset V\,.$$

Pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$ on peut trouver n_i tel que

$$\|x_{n_i} - y_i\|_E \leq \frac{r}{4}\,.$$

Alors en choisissant r' tel que pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$ on ait $2^{n_i} r' < \dfrac{r}{2}$ on a pour tout $g \in U$

$$|\langle f-g, y_i\rangle| \leq |\langle f-g, y_i - x_{n_i}\rangle| + |\langle f-g, x_{n_i}\rangle| < 2\cdot \frac{r}{4} + 2^{n_i} r' < r$$

donc $g \in V$.

- soit $f \in B_{E^*}$, soit $r > 0$ et soit

$$U' := \Big\{ g \in B_{E^*} \,/\, d(f,g) < r\Big\}\,.$$

Montrons qu'il existe $r' > 0$ et p tels que

$$V' := \Big\{ g \in B_{E^*} \,/\, |\langle f-g, x_n\rangle| < r'\,,\ \forall n \in \{1,\dots,p\}\Big\} \subset U'\,.$$

On choisit $r' < \dfrac{r}{4}$ et p assez grand pour que $2^{1-p} < \dfrac{r}{2}$, et on a alors pour tout $g \in V'$

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \sum_{n=1}^{p} 2^{-n} |\langle f-g, x_n\rangle| + \sum_{n\geq p+1} 2^{-n} |\langle f-g, x_n\rangle| \\ &\leq 2r' + 2\sum_{n\geq p+1} 2^{-n} < r\,, \end{aligned}$$

donc $f \in U'$.

$\Longleftarrow$ Supposons que B_{E^*} est métrisable pour $\sigma(E^*, E)$ (avec une distance d) et montrons que E est séparable. On définit pour tout entier $n \geq 1$

$$U_n := \Big\{ f \in B_{E^*} \,/\, d(f, 0) < \frac{1}{n} \Big\}$$

et l'on considère un voisinage V_n de 0 pour $\sigma(E^*, E)$, inclus dans U_n, que l'on écrit sous la forme

$$V_n := \Big\{ f \in B_{E^*} \,/\, |\langle f, x\rangle| < r_n \,,\ x \in A_n \Big\}$$

où $r_n \to 0$ et A_n est un sous-ensemble fini de E. L'ensemble $A := \bigcup_{n\geq 1} A_n$ est dénombrable. Montrons que l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ engendré par A est dense dans E. Il suffit de remarquer que $\bigcap\limits_{n\geq 1} V_n = \{0\}$ donc

$$(\langle f, x\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{A}) \Longrightarrow f = 0$$

et donc par le corollaire A.2.14, $\mathcal{A}$ est dense dans E. D'où le résultat. □

Remarque. Un argument analogue permet de démontrer que si E^* est séparable alors B_E est métrisable. La réciproque est vraie mais est plus délicate à démontrer (voir [**2**]).

Montrons enfin les deux corollaires suivants sur les suites bornées de E^* et E.

Corollaire A.3.24. *Soit E un espace de Banach séparable et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E^*. Alors il existe une sous-suite extraite de (f_n) qui converge pour la topologie $\sigma(E^*, E)$.*

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que $f_n \in B_{E^*}$, et le résultat est un corollaire immédiat des théorèmes A.3.9 (Banach-Alaoglu) et A.3.23 (métrisabilité de B_{E^*}). □

Corollaire A.3.25. *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E. Alors il existe une sous-suite extraite de (x_n) qui converge pour la topologie $\sigma(E, E^*)$.*

Démonstration. Soit X l'espace vectoriel engendré par les x_n. Alors $F := \overline{X}$ est séparable, et réflexif comme sous-espace fermé d'un espace réflexif (Proposition A.3.15). Par le Corollaire A.3.22, F^* est séparable, donc la boule unité fermée $B_{F^{**}}$ de F^{**} est métrisable pour $\sigma(F^{**}, F^*)$ grâce au théorème A.3.23. Par ailleurs grâce au Théorème A.3.9 de Banach-Alaoglu on sait que $B_{F^{**}}$ est compacte pour $\sigma(F^{**}, F^*)$. Donc $B_{F^{**}}$ est compacte métrisable pour $\sigma(F^{**}, F^*)$, et donc B_F, qui est isomorphe à $B_{F^{**}}$ puisque F est réflexif, est compacte métrisable pour $\sigma(F, F^*)$. Le résultat est démontré. □

A.3.6. Application aux espaces de Lebesgue.

Rappels. Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, l'espace $L^p(\Omega)$, pour $1 \leq p < \infty$, est l'ensemble des fonctions f telles que $|f|^p$ est intégrable sur Ω, quotienté par la relation d'équivalence d'égalité presque partout, et muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \Big(\int_\Omega |f|^p(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{p}} \,. \tag{A.18}$$

On définit de même

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \mathrm{supess}_\Omega\, |f| \,.$$

Si $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est complet.
Si $1 \leq p < \infty$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support compact sur Ω est dense dans $L^p(\Omega)$.

Théorème A.3.26. *Si $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*

Démonstration. Le résultat se démontre en pavant Ω par des ensembles $\prod_1^n]a_k, b_k[$ de côtés rationnels et en considérant les fonctions caractéristiques de ces domaines. Les détails sont laissés en exercice. □

Théorème A.3.27. *Si $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe, donc réflexif.*

Démonstration. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$h(r) := (1 + r^{\frac{1}{p}})^p + |1 - r^{\frac{1}{p}}|^p .$$

Alors

$$h'(r) = (1 + r^{-\frac{1}{p}})^{p-1} + |1 - r^{-\frac{1}{p}}|^{p-2}(1 - r^{-\frac{1}{p}})$$

et

$$h''(r) = \frac{p-1}{p} r^{-1-\frac{1}{p}} \Big(|1 - r^{-\frac{1}{p}}|^{p-2} - (1 + r^{-\frac{1}{p}})^{p-2} \Big)$$

donc h est convexe sur $\mathbb{R}^+$ si $p \leq 2$, concave si $p \geq 2$. Rappellons l'inégalité de Jensen : si H est concave alors

$$\frac{\displaystyle\int u^p H\Big((\frac{v}{u})^p \Big)\, dx}{\displaystyle\int u^p\, dx} \leq H \left(\frac{\displaystyle\int v^p\, dx}{\displaystyle\int u^p\, dx} \right) ,$$

et l'inégalité est inversée si H est convexe.

- Dans le cas $p \geq 2$ on a donc

$$\|u + v\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u - v\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \Big(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} \Big)^p + \Big| \|u\|_{L^p(\Omega)} - \|v\|_{L^p(\Omega)} \Big|^p \quad \text{(A.19)}$$

donc si $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$ et $\|u - v\|_{L^p(\Omega)} > 2\varepsilon$ il vient

$$\Big\| \frac{1}{2}(u + v) \Big\|_{L^p(\Omega)} \leq (1 - \varepsilon^p)^{\frac{1}{p}}$$

et le résultat est démontré.

- Dans le cas $p \leq 2$ on a la même inégalité (A.19) inversée et on l'applique à $\tilde{u} = u + v$, $\tilde{v} = u - v$ et $\|\tilde{u}\|_{L^p(\Omega)} = \|\tilde{v}\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Alors

$$\Big(\Big\| \frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v}) \Big\|_{L^p(\Omega)} + \Big\| \frac{1}{2}(\tilde{u} - \tilde{v}) \Big\|_{L^p(\Omega)} \Big)^p + \Big| \Big\| \frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v}) \Big\|_{L^p(\Omega)} - \Big\| \frac{1}{2}(\tilde{u} - \tilde{v}) \Big\|_{L^p(\Omega)} \Big|^p \leq 2$$

et le théorème est démontré. □

Théorème A.3.28 (Représentation de Riesz)**.** *Soit $1 < p < \infty$ et soit $\varphi \in (L^p(\Omega))^*$. Soit p' défini par*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 .$$

Alors il existe $u \in L^{p'}(\Omega)$ unique tel que

$$\forall f \in L^p(\Omega) , \quad \langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega u(x) f(x)\, dx .$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))^*}$$

Démonstration. Soit T l'opérateur défini par

$$T : \begin{array}{l} L^{p'}(\Omega) \longrightarrow (L^p(\Omega))^* \\ u \longmapsto \quad Tu : \begin{array}{l} L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \langle Tu, f\rangle := \displaystyle\int_\Omega u(x)f(x)\,dx\,. \end{array} \end{array}$$

Montrons que T est une isométrie surjective. L'inégalité de Hölder implique que

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} \leq \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}\,.$$

Pour montrer

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} \geq \|u\|_{L^{p'}(\Omega)} \tag{A.20}$$

posons

$$v(x) := |u(x)|^{p'-2}u(x)\,, \quad v(x) := 0 \text{ si } u(x) = 0\,.$$

Alors $v \in L^p(\Omega)$ et

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|^{p'-1}_{L^{p'}(\Omega)}\,.$$

Par ailleurs

$$\langle Tu, v\rangle = \|u\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}$$

donc

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} \geq \frac{\langle Tu, v\rangle}{\|v\|_{L^p(\Omega)}} = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}\,,$$

ce qui démontre (A.20).

Montrons maintenant que T est surjectif, ce qui achèvera la démonstration. L'espace $E := T(L^{p'}(\Omega))$ est un sous-espace fermé de $(L^p(\Omega))^*$ (parce que $L^{p'}(\Omega)$ est complet et T est une isométrie) donc il s'agit de démontrer qu'il est dense dans $(L^p(\Omega))^*$. On applique le Corollaire A.2.14 et le fait que $L^p(\Omega)$ est réflexif ; supposons donc qu'il existe $h \in L^p(\Omega)$, tel que

$$\langle Tu, h\rangle = 0 \quad \forall u \in L^{p'}(\Omega)\,.$$

Alors en posant $u(x) := |h(x)|^{p-2}h(x)$ on en déduit que $h = 0$, d'où le résultat. □

Si $1 \leq p < \infty$ on a l'identification $(L^p)^* = L^{p'}$.

Exercice. Soit $\varphi \in (L^1(\Omega))^*$. Il existe $u \in L^\infty(\Omega)$ unique tel que

$$\forall f \in L^1(\Omega)\,, \quad \langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega u(x)f(x)\,dx\,.$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))^*}$$

L'espace L^1 n'est pas réflexif (et L^∞ non plus). L'espace L^∞ n'est pas séparable.

Chapitre B

Distributions

B.1. Quelques rappels

Nous énonçons ici sans preuve un certain nombre de définitions et de résultats qui nous seront utiles par la suite et qui doivent être connus (et sinon devront être traités à titre d'exercices !).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. On considère l'ouvert ω des points au voisinage desquels $f = 0$ p.p. Alors le support (essentiel) de f est $\Omega \setminus \omega$. Si f est continue, le support de f coïncide avec l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels f ne s'annule pas :

$$\mathrm{Supp}\,(f) = \overline{\left\{x \in \Omega \,/\, f(x) \neq 0\right\}}\,.$$

Si f, g sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ alors leur produit de convolution est la fonction de $L^1(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$f \star g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$$

et l'on a

$$\|f \star g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\,.$$

C'est une opération commutative et associative. Plus généralement le produit de convolution de $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ par $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ vérifie

$$\|f \star g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\,, \quad 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\,\cdot$$

En outre le produit de convolution de f par g est bien défini si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, où l'on note $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^d$. On rappelle que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d\,, \quad \partial^\alpha(f \star g) = f \star \partial^\alpha g\,.$$

Enfin

$$\mathrm{Supp}\,(f \star g) \subset \overline{\mathrm{Supp}\,(f) + \mathrm{Supp}\,(g)}\,.$$

Définition B.1.1 (Suite régularisante)**.** *Soit $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction positive d'intégrale 1, supportée dans $B(0,1)$. La suite $(\zeta_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[}$ définie par*

$$\zeta_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^d}\zeta\Big(\frac{\cdot}{\varepsilon}\Big)$$

est appelée suite régularisante.

Théorème B.1.2 (Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $C_c(\mathbb{R}^d)$)**.** *Soit f une fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}^d$ et soit $(\zeta_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[}$ une suite régularisante. Alors $\zeta_\varepsilon \star f$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\zeta_\varepsilon \star f \to f\,, \quad \varepsilon \to 0\,,$$

uniformément sur $\mathbb{R}^d$.

B.2. Limites inductives et topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$

B.2.1. Sur les fonctions C^∞ à support compact.

Lemme B.2.1. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et U voisinage ouvert de K. Il existe une fonction $\varphi \in C^\infty$, à valeurs dans $[0,1]$, nulle hors de U et telle que $\varphi_{|K} \equiv 1$.*

Démonstration. On commence par montrer l'existence d'une fonction $\psi \in C^\infty$, positive ou nulle, strictement positive sur K, et nulle hors de U. Soit la fonction C^∞

$$\rho(t) := 0 \quad \text{si} \quad t \leq 0\,, \quad \rho(t) := e^{-\frac{1}{t}} \quad \text{si} \quad t > 0\,.$$

Pour tout $a \in K$ il existe une boule ouverte $B(a,r)$ incluse dans U, et on recouvre K par m telles boules ouvertes $\big(B(a_j,r_j)\big)_{1\leq j\leq m}$. On constate alors que la fonction

$$\psi(x) := \sum_{j=1}^{m} \rho(r_j^2 - |x-a_j|^2)$$

convient. Soit maintenant r le minimum sur K de la fonction $x \mapsto d(x, {}^cU)$ et soient les voisinages ouverts de K

$$V_1 := \Big\{x \in \mathbb{R}^d \,/\, d(x,K) < \frac{r}{3}\Big\} \quad \text{et} \quad V_2 := \Big\{x \in \mathbb{R}^d \,/\, d(x,K) < \frac{2r}{3}\Big\}\,.$$

On a alors $\overline{V_1} \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset U$ et la construction précédente fournit une fonction g dans C^∞, positive ou nulle, strictement positive sur $\overline{V_1}$, et nulle hors de V_2 ainsi que d'une fonction h dans C^∞, positive ou nulle, strictement positive sur $\overline{V_2} \setminus V_1$, et nulle sur K. Alors

$$\varphi := \frac{g}{g+h}$$

convient. Le lemme est démontré. □

Définition B.2.2 (Suite exhaustive de compacts)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Une suite exhaustive de compacts $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de Ω est une suite de compacts inclus dans Ω tels que K_j est inclus dans l'intérieur de K_{j+1} et $\Omega = \bigcup\limits_j K_j$. Par exemple*

$$K_j = \Big\{x \in \mathbb{R}^d \,/\, |x| \leq j\,, \quad d(x, {}^c\Omega) \geq j^{-1}\Big\}\,.$$

Proposition B.2.3. *Soient f et g deux fonctions de $L^1_{loc}(\Omega)$. On a les équivalences entre*

a) $f = g$ p.p sur Ω

b) $\displaystyle\int f\varphi(x)\,dx = \int g\varphi(x)\,dx$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Démonstration. On a clairement a) $\Longrightarrow$ b). Inversement définissons $h := f - g$ et soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de Ω. Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\overset{\circ}{K}_{n+1})$ telle que $\theta_n = 1$ sur K_n et soit ζ_ε une suite régularisante. Alors

$$\zeta_\varepsilon \star h\theta_n \to h\theta_n \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0\,, \quad \text{dans} \quad L^1(K_n)\,.$$

Mais $\zeta_\varepsilon \star h\theta_n = 0$ par hypothèse, d'où le résultat. □

Exercices. *a*) Soit φ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à support dans $[0,1]$ et posons

$$\phi_n(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}\varphi(x-j)\,.$$

Montrer que $(\phi_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ muni de la famille de semi-normes

$$\|\varphi\|_k := \max_{|\alpha|\leq k, x\in\mathbb{R}} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

et que sa limite n'est pas à support compact.

b) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et K un compact de Ω.

– L'espace $\mathcal{D}_K(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(K) \,/\, \operatorname{Supp}\varphi \subset K\}$ des fonctions indéfiniment différentiables à support dans K, muni de la famille de semi-normes

$$p_n(\varphi) := \max_{|\alpha|\leq n, x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

est un espace de Fréchet.

– L'espace $\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \,/\, \operatorname{Supp}\varphi \text{ est compact}\}$ des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support compact, muni de la famille de semi-normes

$$\|\varphi\|_n := \max_{|\alpha|\leq n, x\in\Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

est un pré-Fréchet, mais il n'est pas complet. Sa complétion est l'ensemble $C_0^\infty(\Omega)$ des fonctions C^∞ tendant vers 0, ainsi que toutes leurs dérivées, sur le bord de Ω (resp. à l'infini si Ω n'est pas borné).

Pour compléter $\mathcal{D}(\Omega)$ on va rendre la topologie plus fine, afin de restreindre l'ensemble des suites de Cauchy convergentes. Cette topologie s'avèrera ne pas être métrisable mais ce ne sera pas un problème dans la pratique.

B.2.2. Limites inductives.

Définition B.2.4. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et soit une suite croissante $(E_k, \mathcal{T}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'espaces vectoriels topologiques localement convexes telle que $E := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, E_k est fermé dans E_{k+1} pour la topologie $\mathcal{T}_{k+1}$ et que la topologie de E_k est celle induite de celle de E_{k+1} sur E_k (en d'autres termes $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_{k+1|E_k}$). On associe à chaque topologie $\mathcal{T}_k$ une famille de semi-normes $\mathcal{P}_k = (p_k^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}_k}$. La topologie $\mathcal{T}$ sur E définie par la famille de semi-normes*

$$\mathcal{P} := \Big\{p \text{ semi-norme sur } E \,/\, p_{|E_k} \text{ est continue pour tout } k \in \mathbb{N}\Big\},$$

autrement dit

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{P} \iff \forall k \in \mathbb{N}\,,\ \exists C > 0\,, J \subset \mathcal{A}_k \text{ finie}\,,\\ p \leq C \sup_{\alpha\in J} p_k^\alpha \text{ sur } E_k\,, \end{aligned} \tag{B.1}$$

est appelée topologie limite inductive des topologies $(\mathcal{T}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Notons que les injections canoniques

$$J_k : E_k \to E$$

sont donc continues de $(E_k, \mathcal{T}_k)$ vers $(E, \mathcal{T})$.

Dans tout ce paragraphe on se placera dans le contexte de la Définition B.2.4.

Remarque. La topologie $\mathcal{T}$ limite inductive des topologies $(\mathcal{T}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe la plus fine rendant continues les injections canoniques $J_k : E_k \to E$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet soit $\mathcal{T}'$ une topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe sur E, qui rend continues ces projections canoniques, et soit $\mathcal{P}'$ la famille de semi-normes associée. Comme les injections canoniques sont continues on a par (B.1) que $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, donc $\mathcal{T}$ a plus d'ouverts que $\mathcal{T}'$ et est donc plus fine.

Exemples. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les espaces des fonctions continues à support compact $C_c(\Omega)$, de classe C^m à support compact $C_c^m(\Omega)$, et de classe C^∞ à support compact $C_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ sont limites inductives des suites d'espaces C_{K_i}, $C_{K_i}^m$ et $C_{K_i}^\infty$ respectivement, où (K_i) est une suite exhaustive de compacts de Ω. On vérifie facilement que la topologie définie par ces limites inductives ne dépend pas du choix de la suite de compacts.

Lemme B.2.5. *Soit $(E, \mathcal{T})$ limite inductive d'une suite croissante $(E_k, \mathcal{T}_k)$ d'espaces vectoriels topologiques localement convexes. Soit F un espace vectoriel topologique localement convexe et T une application linéaire de E dans F. Alors T est continue si et seulement si $T_{|E_k}$ est continue (pour $\mathcal{T}_k$) pour tout k.*

Démonstration. Si T est continue alors $T_{|E_k}$ l'est aussi comme composée de T et de l'injection canonique $J_k : E_k \to E$. Inversement supposons que $T_{|E_k}$ est continue pour tout k, et soit $\mathcal{Q}$ une famille de semi-normes définissant la topologie de F et $q \in \mathcal{Q}$. Alors $q \circ T$ est une semi-norme sur E continue sur chaque E_k et appartient donc à $\mathcal{P}$. Le résultat suit. $\square$

Lemme B.2.6. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et F un sous-espace vectoriel de E. Si U est un ouvert convexe de F pour la topologie induite par celle de E, il existe C ouvert convexe de E tel que $U = C \cap F$.*

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $0 \in U$. Par définition il existe un ouvert V de E tel que $U = V \cap F$ et par locale convexité il existe W ouvert convexe de E contenant 0 tel que $W \subset V$. On pose alors

$$C := \bigcup_{t \in [0,1]} (tW + (1-t)U) .$$

Comme pour tout $x \in U$ on peut écrire

$$x = \varepsilon^2 x + (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)x , \quad \text{avec } (1+\varepsilon)x \in U \text{ et } \varepsilon x \in W \text{ pour } \varepsilon \text{ assez petit}$$

on a

$$C = \bigcup_{t \in]0,1]} (tW + (1-t)U) ,$$

donc C est ouvert, et il est évidemment convexe. On a clairement $U \subset C \cap F$, et enfin on a $C \cap F \subset U$ car pour tout $t \in]0,1]$

$$(tW + (1-t)U) \cap F = tW \cap F + (1-t)U \subset tV \cap F + (1-t)U \subset tU + (1-t)U \subset U$$

car U est convexe. Le lemme est démontré. $\square$

Proposition B.2.7. *Soit $(E, \mathcal{T})$ limite inductive d'une suite croissante $(E_k, \mathcal{T}_k)$ d'espaces vectoriels topologiques localement convexes vérifiant les hypothèses de la Définition B.2.4. On a les propriétés suivantes :*

a) Si U est un convexe symétrique de E contenant 0 tel que $U \cap E_k$ est un ouvert de E_k pour tout k, alors U est un voisinage de 0 dans $(E, \mathcal{T})$.

b) La topologie $\mathcal{T}_{|E_k}$ induite par celle de E sur E_k coïncide avec celle de E_k.

c) Si chaque $(E_k, \mathcal{T}_k)$ est séparé, alors $(E, \mathcal{T})$ l'est aussi.

d) E_k est fermé dans $(E, \mathcal{T})$ pour tout k.

Démonstration. a) Par définition, pour tout k il existe une boule ouverte B_k pour $\mathcal{P}_k$ centrée en 0 incluse dans $U \cap E_k$. On rappelle que $\|\cdot\|_C$ désigne la jauge d'un convexe C, et c'est une semi-norme si C est symétrique. Alors $\|\cdot\|_{U}\big|_{E_k} \leq \|\cdot\|_{B_k}$ donc $\|\cdot\|_U$ est une semi-norme continue sur $(E,\mathcal{T})$. Comme l'ensemble $\Big\{x \,/\, \|x\|_U < 1\Big\}$ est inclus dans U, U est un voisinage de 0 dans $(E,\mathcal{T})$.

b) On a $\mathcal{T}_{|E_k} \subset \mathcal{T}_k$ car pour tout ouvert U de $(E,\mathcal{T})$ on a $U \cap E_k = J_k^{-1}(U) \in \mathcal{T}_k$ puisque l'injection canonique J_k est continue.

Inversement soit U_k un ouvert (convexe symétrique contenant 0 sans perte de généralité) de $(E_k,\mathcal{T}_k)$, et montrons qu'il existe un voisinage ouvert non vide U de 0 dans $(E,\mathcal{T})$ tel que $U_k = U \cap E_k$. On construit itérativement, par application du Lemme B.2.6, une suite croissante de convexes (que l'on peut supposer symétriques) $(U_{k+\ell})_{\ell \geq 1}$ tels que pour tout $\ell \geq 1$, $U_{k+\ell}$ est ouvert dans $E_{k+\ell}$ et $U_k = U_{k+\ell} \cap E_k$. L'ensemble $U := \displaystyle\bigcup_{\ell \geq 1} U_{k+\ell}$ contient 0, il est convexe parce que la suite $(U_{k+\ell})_{\ell \geq 1}$ est croissante, il est symétrique, et on a $U_k = U \cap E_k$ par construction. Donc U est un voisinage de 0 dans $(E,\mathcal{T})$ grâce à a), donc U convient.

c) Soit $x \neq 0$ un élément de E, montrons qu'il existe U voisinage ouvert de 0 dans $\mathcal{T}$ tel que $x \notin U$. On sait qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in E_k$, et un ouvert convexe symétrique U_k contenant 0 tel que $x \notin U_k$. Comme dans le point b) on construit une suite croissante de convexes symétriques $(U_{k+\ell})_{\ell \geq 1}$ tels que $U_{k+\ell}$ est ouvert dans $E_{k+\ell}$ et $U_k = U_{k+\ell} \cap E_k$. L'ensemble $U := \displaystyle\bigcup_{\ell \geq 1} U_{k+\ell}$ est un voisinage ouvert non vide de 0 dans E et on a $U_k = U \cap E_k$ donc U ne contient pas x.

d) Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $x \in E \setminus E_k$, montrons qu'il existe U voisinage ouvert de 0 dans $\mathcal{T}$ tel que $(x+U) \cap E_k = \emptyset$. Soit $m > k$ tel que $x \in E_m$. On sait que E_k est fermé dans E_m donc il existe un voisinage de 0 convexe symétrique U_m de $\mathcal{T}_m$ tel que $(x+U_m) \cap E_k = \emptyset$. On construit comme ci-dessus une suite croissante de convexes symétriques $(U_{m+\ell})_{\ell \geq 1}$ tels que $U_{m+\ell}$ est ouvert dans $E_{m+\ell}$ et $U_m = U_{m+\ell} \cap E_m$. Par ailleurs $(x+U_{m+\ell}) \cap E_k = \emptyset$: en effet si $y \in (x+U_{m+\ell}) \cap E_k$ alors $y-x \in U_{m+\ell} \cap E_m = U_m$ ce qui est impossible. L'ensemble U réunion des $(U_{m+\ell})_{\ell \geq 1}$ est un voisinage ouvert de 0 dans $(E,\mathcal{T})$ tel que $(x+U) \cap E_k = \emptyset$. Donc E_k est fermé dans $(E,\mathcal{T})$.

La proposition est démontrée. □

Théorème B.2.8. *Soit $(E,\mathcal{T})$ limite inductive d'une suite croissante $(E_k,\mathcal{T}_k)$ d'espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E et $x \in E$. On a les équivalences*

a) (x_n) converge vers x dans E ;

b) Il existe un entier k tel que $x \in E_k$ et $x_n \in E_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tel que (x_n) converge vers x dans E_k.

Démonstration. *a)* $\Longrightarrow$ *b)* : Supposons que (x_n) converge vers x dans E. Montrons qu'il existe k tel que $x_n \in E_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On aura alors $x \in E_k$ puisque E_k est fermé par la Proposition B.2.7 d). Supposons qu'il n'existe pas de tel k. Alors on peut construire des sous-suites k_ℓ et n_ℓ telles que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ on ait $x_{n_\ell} \in E_{k_{\ell+1}} \setminus E_{k_\ell}$. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, comme E_{k_ℓ} est fermé dans E il existe par le le théorème de Hahn-Banach une forme linéaire $T_\ell \in E^*$ (pour la topologie $\mathcal{T}$) telle que

$$T_{\ell|E_{k_\ell}} \equiv 0 \quad \text{et} \quad T_\ell(x_{n_\ell}) \neq 0\,.$$

Définissons sur E la fonction p par

$$\forall x \in E\,, \quad p(x) := \sum_{\ell \geq 0} \ell \frac{|T_\ell(x)|}{|T_\ell(x_{n_\ell})|}\,.$$

Cette somme est finie sur chaque E_k donc p est une semi-norme continue sur chaque E_k et donc sur E. En particulier la suite $(p(x_{n_\ell}))_\ell$ devrait être bornée puisque (x_{n_ℓ}) converge vers x, alors que par construction

$$p(x_{n_\ell}) \geq \ell\,.$$

On en déduit donc qu'il existe k tel que $x_n \in E_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $x \in E_k$. On donc (x_n) converge vers x pour la topologie $\mathcal{T}_{|E_k}$ et donc dans $(E_k, \mathcal{T}_k)$ par la Proposition B.2.7 b).

$b) \Longrightarrow a)$: C'est une conséquence directe de la Proposition B.2.7 b).

Le théorème est démontré. □

Proposition B.2.9. *Soit $(E, \mathcal{T})$ limite inductive d'une suite croissante $(E_k, \mathcal{T}_k)$ d'espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés. Si chaque E_k est complet, alors E l'est aussi.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy de $(E, \mathcal{T})$ et commençons par montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in E_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de remarquer que pour tout $p \in \mathcal{P}$ la suite $(p(x_n))$ est bornée puis procéder par l'absurde exactement comme dans la démonstration du Théorème B.2.8. Comme $\mathcal{T}_{|E_k} = \mathcal{T}_k$ on conclut que (x_n) est de Cauchy dans $(E_k, \mathcal{T}_k)$ et elle converge donc par complétude de E_k. □

Corollaire B.2.10. *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la topologie limite inductive des topologies de $C^\infty_{K_i}(\Omega)$ avec K_i suite exhaustive de compacts de Ω, est complet.*

Proposition B.2.11. *Soit $(E, \mathcal{T})$ limite inductive d'une suite $(E_k, \mathcal{T}_k)$ strictement croissante d'espaces de Fréchet. Alors E n'est pas métrisable.*

Démonstration. Chaque E_k est fermé dans E, et d'intérieur vide. En effet s'il existait k tel que E_k est d'intérieur non vide, E_k contiendrait un voisinage de 0 ce qui impliquerait que $E_k = E$ (car pour tout $x \in E$ il existerait λ suffisamment petit tel que λx soit dans ce voisinage), ce qui est impossible puisque la suite (E_k) est strictement croissante. Mais E est complet donc s'il était métrisable, par le théorème de Baire on aurait $E = \bigcup E_k$ d'intérieur vide, ce qui est absurde. □

Proposition B.2.12. *Soit $(E, \mathcal{T})$ limite inductive d'une suite croissante $(E_k, \mathcal{T}_k)$ d'espaces vectoriels topologiques localement convexes et soit T une forme linéaire sur E. Si chaque E_k est métrisable, alors T est continue si et seulement si elle est séquentiellement continue.*

Démonstration. Si T est séquentiellement continue, alors $T_{|E_k}$ est séquentiellement continue pour tout k et donc $T_{|E_k}$ est continue pour tout k, ce qui implique le résultat par le Lemme B.2.5. □

On en déduit la généralisation suivante du théorème de Banach-Steinhaus A.1.13.

Théorème B.2.13. *Soit $(E, \mathcal{T})$ limite inductive d'une suite croissante $(E_k, \mathcal{T}_k)$ d'espaces de Fréchet (de topologie associée à une famille de semi-normes $\mathcal{P}_k$) et F un pré-Fréchet (de topologie associée à une famille de semi-normes $\mathcal{Q}$). On considère une famille $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ d'applications linéaires continues de E dans F telles que pour tout $x \in E$, la famille $(T_\alpha x)_{\alpha \in \mathcal{A}}$*

est bornée dans F. Alors pour tout $q \in \mathcal{Q}$ et tout k il existe $C > 0$, $\ell \in \mathbb{N}$ et $p_1, \dots, p_\ell$ dans $\mathcal{P}_k$ tels que

$$\forall x \in E_k\,, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}\,, \quad q(T_\alpha x) \leq C \sup_{1 \leq j \leq \ell} p_j(x)\,.$$

B.3. Distributions : définitions et premières propriétés

La théorie des distributions a été formalisée par L. Schwartz dans les années 50, après des idées de Heaviside à la fin du dix-neuvième siècle, mais aussi Hadamard, Leray, Poincaré et Sobolev au début du vingtième siècle. Il s'agit de généraliser la notion de fonction et d'étendre la notion de dérivée à toute fonction localement intégrable.

Dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, Ω sera un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On munit $\mathcal{D}(\Omega)$ de la topologie définie au paragraphe précédent (Corollaire B.2.10).

Définition B.3.1. *Une distribution T sur Ω est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$*

$$T: \begin{array}{l} \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle\,. \end{array}$$

L'espace des distributions est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$. L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est parfois appelé espace de fonctions test.

La proposition suivante découle directement des propriétés vues dans le paragraphe précédent.

Proposition B.3.2. *On a les équivalences entre*

— *T est une distribution sur Ω*

— *pour tout compact K de Ω il existe un entier m et une constante $C > 0$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup \Big\{ |\partial^\alpha \varphi(x)|\,,\ x \in K\,,\ \alpha \in \mathbb{N}^d\,,\ |\alpha| \leq m \Big\}$$

— *T est séquentiellement continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$*

— *T est séquentiellement continue en 0.*

Remarque. On rappelle que T est séquentiellement continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ si la propriété suivante est vérifiée : si $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (c'est-à-dire s'il existe un compact K tel que pour tout n, φ_n et φ sont à support dans K et $\partial^\alpha \varphi_n$ converge uniformément dans K vers $\partial^\alpha \varphi$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$), alors $\langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$.

Définition B.3.3. *Si l'entier m ci-dessus peut être choisi indépendamment de K on dit que la distribution est d'ordre fini, et la plus petite valeur possible de m est l'ordre de la distribution.*

Exemples. a) Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors l'application

$$T_f : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \longmapsto \int f(x)\varphi(x)\,dx$$

est une distribution d'ordre 0 sur Ω. On dit qu'une distribution T est une fonction s'il existe f dans $L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $T = T_f$. Remarquons que la relation d'équivalence "$f = g$ p.p" est exactement la même que la relation d'équivalence "f et g définissent la même distribution" (voir la Proposition B.2.3). Nous identifierons donc toujours l'espace L^1_{loc} avec l'espace des distributions qu'il définit et nous noterons donc f pour la distribution qu'elle définit.

b) Soit $a \in \Omega$, on appelle masse de Dirac en a et l'on note δ_a la distribution d'ordre 0 définie par

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a) , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

c) La distribution sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) , \quad \langle T, \varphi \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$$

est d'ordre infini.

Théorème B.3.4 (Valeur principale)**.** *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. L'intégrale*

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x) \frac{dx}{x}$$

possède une limite lorsque ε tend vers zéro. L'application

$$vp\Big(\frac{1}{x}\Big) : \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longmapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x) \frac{dx}{x}$$

est une distribution d'ordre 1, appelée valeur principale de $\frac{1}{x}\cdot$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et définissons la fonction continue

$$g(x) := \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 , \quad \text{et} \quad g(0) := \varphi'(0) .$$

Soit $R > 0$ tel que $\operatorname{Supp} \varphi \subset [-R, R]$. Alors

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x) \frac{dx}{x} = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \varphi(x) \frac{dx}{x}$$

donc par imparité

$$\begin{aligned} \int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x) \frac{dx}{x} &= \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} g(x)\, dx + \varphi(0) \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{dx}{x} \\ &= \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} g(x)\, dx \longrightarrow \int_{|x| \leq R} g(x)\, dx , \quad \varepsilon \to 0 , \end{aligned}$$

d'où l'existence de la limite. Par ailleurs pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|g(x)| \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} |\varphi'(y)|$$

donc

$$\Big| \Big\langle \mathrm{vp}\Big(\frac{1}{x}\Big), \varphi \Big\rangle \Big| \leq 2R \sup_y |\varphi'(y)|$$

donc cette distribution est d'ordre au plus 1. Montrons qu'elle est d'ordre exactement 1. Par l'absurde sinon on aurait pour tout compact K de $\mathbb{R}$

$$\exists\, C > 0 , \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}) , \quad \Big| \Big\langle \mathrm{vp}\Big(\frac{1}{x}\Big), \varphi \Big\rangle \Big| \leq C \sup_y |\varphi(y)| . \tag{B.2}$$

Soit alors la suite $\varphi_n(x)$ de fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, supportée dans $[0, 2]$ et à valeurs dans $[0, 1]$, définie par

$$\varphi_n(x) = 1 \quad \text{sur} \quad \Big[\frac{1}{n}, 1\Big] , \quad \varphi_n(x) = 0 \quad \text{sur} \quad \Big] -\infty, \frac{1}{2n}\Big] \cup [2, \infty[.$$

Alors pour tout $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{2n}$ on a

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,dx = \int_{\frac{1}{2n}}^{2} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,dx \geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \log(n)$$

donc

$$\Big|\Big\langle \mathrm{vp}\Big(\frac{1}{x}\Big), \varphi_n\Big\rangle\Big| \geq \log(n)$$

ce qui rend impossible l'inégalité (B.2). Le théorème B.3.4 est démontré. □

Définition B.3.5. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que (T_n) converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle\,, \quad n \to \infty\,.$$

Lemme B.3.6. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{D}(\Omega)$ telles que*

$$\varphi_n \to \varphi \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \textit{et} \quad T_n \to T \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$

Alors

$$\langle T_n, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle\,.$$

Démonstration. Soit K un compact de Ω tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \operatorname{Supp}\varphi_n \subset K \quad \text{et} \quad \operatorname{Supp}\varphi \subset K\,,$$

et $\partial^\alpha\varphi_n$ converge uniformément dans K vers $\partial^\alpha\varphi$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$. On écrit

$$\langle T_n, \varphi_n\rangle - \langle T, \varphi\rangle = \langle T_n - T, \varphi\rangle + \langle T_n, \varphi_n - \varphi\rangle$$

et on remarque que le premier terme tend vers zéro par hypothèse. Le second tend vers zéro aussi grâce au théorème de Banach-Steinhaus B.2.13 : en effet comme $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors en particulier pour tout compact K' et toute fonction $\phi \in \mathcal{D}_{K'}(\Omega)$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \big|\langle T_n, \phi\rangle\big| < \infty\,.$$

Le théorème de Banach-Steinhaus B.2.13 implique alors que pour tout compact K' il existe une constante C et un entier m tels que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}_{K'}(\Omega)$ on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \big|\langle T_n, \phi\rangle\big| \leq C \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K'} \big|\partial^\alpha\phi\big|\,.$$

Il suffit d'appliquer ce résultat à $K' := K$ et $\phi := \varphi_n - \varphi$ pour conclure. □

Proposition B.3.7. *Soit ζ_ε une suite régularisante au sens de la Définition B.1.1. Alors*

$$\zeta_\varepsilon \to \delta_0 \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)\,, \quad \varepsilon \to 0\,.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et calculons

$$I_\varepsilon := \int \zeta_\varepsilon\varphi(x)\,dx\,.$$

Comme ζ_ε est d'intégrale 1 on a

$$I_\varepsilon = \int \zeta_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx + \varphi(0)$$

et

$$\Big|\int \zeta_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx\Big| \leq C\varepsilon \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi(x)|$$

ce qui démontre le résultat. □

Remarque. Dans la démonstration de la Proposition B.3.7 il n'est pas nécessaire que la fonction ζ définissant la suite régularisante soit à support compact. Par exemple la fonction

$$\rho_\varepsilon \,:\, x \longmapsto \frac{1}{\varepsilon^d}\rho\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,, \quad \rho(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

vérifie de même

$$\rho_\varepsilon \to \delta_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)\,, \quad \varepsilon \to 0\,. \tag{B.3}$$

Définition B.3.8. *Soit U un ouvert de Ω et soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que $T_1 = T_2$ sur U si*

$$\langle T_1, \varphi\rangle = \langle T_2, \varphi\rangle\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(U)\,.$$

Soit $a \in U$. On dit que T_1 et T_2 sont égales au voisinage de a s'il existe un voisinage ouvert de a dans Ω sur lequel $T_1 = T_2$.

Remarque. Le produit usuel de deux fonctions réelles ne se géneralise pas aux distributions. Par exemple il est impossible de donner un sens à δ_a^2. En effet on peut considérer la suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n$ sur $[0, 1/n]$ et 0 ailleurs. La suite f_n converge au sens des distributions vers δ_0 (voir la démonstration de la Proposition B.3.7), alors que f_n^2 n'a pas de limite.

Définition B.3.9 (Produit $C^\infty \times \mathcal{D}'$)**.** *Soit $\psi \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on appelle produit de T par ψ et l'on note ψT la distribution définie par*

$$\langle \psi T, \varphi\rangle := \langle T, \psi\varphi\rangle\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Exercice. Montrer que pour toute fonction ψ de classe C^∞ dans un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant a, on a

$$\psi\delta_a = \psi(a)\delta_a\,.$$

Définition B.3.10 (Support d'une distribution)**.** *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on appelle support de T et l'on note $\operatorname{Supp} T$ le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert sur lequel T est nulle. On dit que T est à support compact si son support est compact. On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions à support compact sur Ω,*

Exemple. On a $\operatorname{Supp} \delta_a = \{a\}$.

Remarque. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est nulle sur le support de T, on n'a pas nécessairement $\langle T, \varphi\rangle = 0$. On peut considérer par exemple sur $\mathbb{R}$ la distribution définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \langle T, \varphi\rangle := \varphi'(0)$$

qui est à support réduit au point $\{0\}$, et la fonction $\varphi(x) := x\psi(x)$ avec $\psi \in \mathcal{D}(]-2, 2[)$ égale à 1 sur $[-1, 1]$. On a alors $\varphi(0) = 0$ alors que $\langle T, \varphi\rangle = 1$ (voir la Proposition B.3.13 ci-dessous pour un résultat positif).

Lemme B.3.11 (Produit $\mathcal{D} \times \mathcal{D}'$)**.** *Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors ψT est un élément de $\mathcal{E}'(\Omega)$.*

Démonstration. Soit K le support de ψ et montrons que la distribution ψT est à support dans K. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support en dehors de K (au sens où $\operatorname{Supp} \varphi \cap K = \emptyset$) alors il suffit de remarquer que par construction $\varphi\psi = 0$ et donc

$$\langle \psi T, \varphi\rangle = \langle T, \psi\varphi\rangle = 0\,.$$

Le lemme est démontré. □

Proposition B.3.12. *Les distributions à support compact sont d'ordre fini.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et soit une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\psi_{|\mathrm{Supp}\,T} \equiv 1\,.$$

On pose $K' := \mathrm{Supp}\,\psi$. Soit K un compact inclus dans Ω et une fonction $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Alors on écrit

$$\varphi = \psi\varphi + (1-\psi)\varphi$$

et le support de la fonction $(1-\psi)\varphi$ est inclus dans le complémentaire du support de T. On a donc

$$\langle T, (1-\psi)\varphi\rangle = 0\,.$$

Comme $\mathrm{Supp}\,(\psi\varphi) \subset K'$ on a donc

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi\rangle| &= |\langle T, \psi\varphi\rangle| \\ &\leq C_{K'} \sup_{|\alpha|\leq m_{K'}} \|\partial^\alpha(\psi\varphi)\|_{L^\infty} \\ &\leq C'_{K'} \sup_{|\alpha|\leq m_{K'}} \|\partial^\alpha\varphi\|_{L^\infty}\,. \end{aligned}$$

La distribution T est donc d'ordre au plus $m_{K'}$. □

Proposition B.3.13. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution d'ordre m et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nulle sur le support de T ainsi que ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à m. Alors $\langle T, \varphi\rangle = 0$.*

Démonstration. Soit K' un voisinage compact du support de φ et soit $K := K' \cap \mathrm{Supp}\,T$. Soit $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ à valeurs dans $[0,1]$, nulle si $d(x,K) > 3/n$ et telle que

$$\psi_n(x) = 1 \quad \text{si} \quad d(x,K) \leq \frac{1}{n}$$

et telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe une constante C telle que

$$|\partial^\alpha \psi_n(x)| \leq C n^{|\alpha|}\,. \tag{B.4}$$

Par exemple on choisit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ positive, à support dans $B(0,1)$ et d'intégrale 1 et on pose $\psi_n(x) := \mathbf{1}_{K_n} \star n^d \rho(n\,\cdot)$ avec $K_n := \{x \in \Omega \,/\, d(x,K) \leq 2/n\}$.

Le support de la fonction $\varphi(1-\psi_n)$ est inclus dans K' et est disjoint de K, donc disjoint de $\mathrm{Supp}\,T$. Par définition du support de T on a donc

$$\langle T, \varphi(1-\psi_n)\rangle = 0$$

donc

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\psi_n\rangle\,.$$

Mais T est d'ordre m donc il existe $M > 0$ telle que

$$\Big|\langle T, \varphi\psi_n\rangle\Big| \leq M \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha(\varphi\psi_n)(x)|\,.$$

Montrons que pour $|\alpha| \leq m$

$$\sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha(\varphi\psi_n)(x)| \leq C n^{|\alpha|-m-1} \tag{B.5}$$

si n est assez grand, avec C une constante uniforme en n, ce qui démontrera le résultat souhaité. Notons que si $x \in \mathrm{Supp}\,(\varphi\psi_n)$ alors soit $x \in K$ auquel cas $\partial^\beta\varphi(x) = 0$ pour tout $|\beta| \leq m$, soit $x \in \mathrm{Supp}\,(\varphi\psi_n) \setminus K$ et alors la formule de Taylor (appliquée en un point $a \in K$ tel que $d(x,K) = |x-a|$) implique que pour tout $|\beta| \leq m$ on a

$$|\partial^\beta\varphi(x)| \leq C\,|x-a|^{m+1-|\beta|} \leq C n^{|\beta|-m-1}\,.$$

Alors on écrit la formule de Leibniz

$$\partial^\alpha(\varphi\psi_n)(x) = \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^{\alpha-\beta}\psi_n(x)\,\partial^\beta\varphi(x)\,,$$

et donc si $|\alpha| \leq m$ et par (B.4) il vient

$$\left|\partial^\alpha(\varphi\psi_n)(x)\right| \leq C\sum_{\beta\leq\alpha} n^{|\alpha|-|\beta|} \sup_{d(x,K)\leq\frac{3}{n}} |\partial^\beta\varphi(x)|$$

et donc

$$\left|\partial^\alpha(\varphi\psi_n)(x)\right| \leq C'\sum_{\beta\leq\alpha} n^{|\alpha|-|\beta|} n^{|\beta|-m-1}\,.$$

On a donc (B.5), et la proposition est démontrée. □

Proposition B.3.14. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nulle sur le support de T ainsi que ses dérivées partielles de tout ordre. Alors $\langle T, \varphi\rangle = 0$.*

Démonstration. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de Ω et pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de K_n. Alors $\psi_n T$ est une distribution à support compact grâce au Lemme B.3.11. Mais alors $\psi_n T$ est d'ordre m_n fini par la Proposition B.3.12. Par ailleurs le support de $\psi_n T$ est inclus dans le support de T. On en déduit que φ et toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre m_n sont nulles sur le support de $\psi_n T$ et donc par la Proposition B.3.13

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \langle \psi_n T, \varphi\rangle = 0\,.$$

Mais il existe n_0 tel que le support de φ soit inclus dans K_{n_0}, donc $\psi_{n_0}\varphi = \varphi$ et alors

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \psi_{n_0}\varphi\rangle = \langle \psi_{n_0} T, \varphi\rangle = 0\,.$$

La proposition est démontrée. □

Théorème B.3.15 (Dualité $\mathcal{E}'(\Omega) - C^\infty(\Omega)$)**.** *Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Pour toute fonction φ dans $C^\infty(\Omega)$, la valeur $\langle T, \chi\varphi\rangle$ est indépendante du choix de $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ égale à 1 sur un voisinage ouvert de $\operatorname{Supp} T$. On définit donc*

$$\langle T, \varphi\rangle := \langle T, \chi\varphi\rangle$$

pour toute telle χ.

Démonstration. Soient χ_1 et χ_2 deux fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ égales à 1 respectivement sur U_1 et U_2 deux voisinages ouverts de $\operatorname{Supp} T$. Alors elles sont égales sur $U_1 \cap U_2$ qui est un voisinage ouvert de $\operatorname{Supp} T$. Soit $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, alors

$$\operatorname{Supp}\left((\chi_1 - \chi_2)\varphi\right) \cap \operatorname{Supp} T = \emptyset\,.$$

Mais $(\chi_1 - \chi_2)\varphi$ est nulle, ainsi que toutes ses dérivées, sur $\operatorname{Supp} T$. D'après la Proposition B.3.14 on déduit que

$$\langle T, (\chi_1 - \chi_2)\varphi\rangle = 0\,,$$

d'où le résultat. □

Exercice. Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$. On suppose que $T_n \to T$ au sens des distributions et $\varphi_n \to \varphi$ uniformément ainsi que chacune de ses dérivées, sur tout compact de Ω. Alors $\varphi_n T_n \to \varphi T$ au sens des distributions.

Remarque. On peut identifier $\mathcal{E}'(\Omega)$ au dual topologique de l'espace de Fréchet $C^\infty(\Omega)$. En effet le Théorème B.3.15 montre que toute distribution T dont le support est compact est la restriction à $\mathcal{D}(\Omega)$ d'une unique forme linéaire continue S sur $C^\infty(\Omega)$. Inversement toute restriction à $\mathcal{D}(\Omega)$ d'une forme linéaire S continue sur $C^\infty(\Omega)$ est une distribution à support compact : si une distribution T est à support non compact alors il existe une suite (φ_n) de $\mathcal{D}(\Omega)$ dont le support est disjoint de $B(0,n)$ et telle que $\langle T, \varphi_n\rangle = 1$, ce qui est impossible puisque $\langle S, \varphi_n\rangle \to 0$.

B.4. Dérivation au sens des distributions

Définition B.4.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. La dérivée $\partial^\alpha T$ d'ordre α de T est la distribution définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle\,.$$

Remarque. Si T est d'ordre m alors $\partial^\alpha T$ est d'ordre au plus $m+|\alpha|$ mais elle peut être d'ordre strictement inférieur. Par exemple les distributions x^n sont d'ordre 0 pour tout n.

Proposition B.4.2. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ convergeant vers une distribution T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la suite de distributions $(\partial^\alpha T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\partial^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\langle \partial^\alpha T_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_n, \partial^\alpha \varphi\rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle\,.$$

La proposition est démontrée. □

Exemples.

a) Soit $a \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. La distribution $\partial^\alpha \delta_a$ est définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \langle \partial^\alpha \delta_a, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi(a)\,.$$

Elle est d'ordre $|\alpha|$ et son support est $\{a\}$. Pour vérifier que l'ordre est exactement $|\alpha|$ on peut considérer (avec $a = 0$ et $d = 1$ pour simplifier) la suite de fonctions $\varphi_n(x) := x^\alpha \psi(nx)$ avec $\psi \in \mathcal{D}([-1,1])$ égale à 1 près de 0. On a

$$\langle \partial^\alpha \delta_0, \varphi_n\rangle = \alpha\,!$$

alors que pour tout $\beta < \alpha$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} \left|\partial^\beta (x^\alpha \psi(nx))\right| \to 0\,.$$

b) Sur $\mathbb{R}$ on a

$$x\delta_0' = -\delta_0\,.$$

c) Soit la fonction de Heaviside définie par

$$H(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \leq 0\,, \qquad H(x) = 1 \quad \text{si} \quad x > 0\,.$$

Alors $H' = \delta_0$.

Proposition B.4.3. *La distribution vp définie au Théorème* B.3.4 *est la dérivée au sens des distributions de la fonction $x \longmapsto \log|x|$ (qui est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$).*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\big\langle (\log|\cdot|)', \varphi\big\rangle = -\big\langle \log|\cdot|, \varphi'\big\rangle = -\int \log|x|\,\varphi'(x)\,dx\,.$$

Mais

$$\int \log|x|\,\varphi'(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \log|x|\,\varphi'(x)\,dx\,,$$

et par intégration par parties on a

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \log|x|\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x)\frac{dx}{x} - \log\varepsilon\,(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))\,.$$

En passant à la limite $\varepsilon \to 0$, comme φ est dérivable en 0 on obtient

$$\int \log|x|\,\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x)\frac{dx}{x}$$

ce que l'on voulait démontrer. □

On note $x_+ := \max(x,0)$. On définit la distribution partie finie pour identifier à des distributions les fonctions x_+^s, qui ne sont pas sommables pour $s \leq -1$.

Définition B.4.4 (Partie finie)**.** *Soit $s \in]-2,-1[$. La partie finie de x_+^s est la distribution $pf(x_+^s)$, d'ordre 1, définie par*

$$\langle pf(x_+^s), \varphi\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{x\geq\varepsilon} x^s\,\varphi(x)\,dx - \frac{\varepsilon^{s+1}}{s+1}\varphi(\varepsilon)\Big) = -\int_0^\infty \frac{x^{s+1}}{s+1}\varphi'(x)\,dx\,.$$

Exercice. On définit sur $\mathbb{R}$ la partie finie de x^{-2} par

$$\mathrm{pf}\Big(\frac{1}{x^2}\Big) := -\mathrm{vp}'\Big(\frac{1}{x}\Big)\,.$$

Montrer que

$$x\,\mathrm{pf}\Big(\frac{1}{x^2}\Big) = \mathrm{vp}\Big(\frac{1}{x}\Big)\,.$$

Théorème B.4.5. *Soit $a \in \mathbb{R}^d$. Les distributions sur $\mathbb{R}^d$ dont le support est $\{a\}$ sont les combinaisons linéaires de dérivées de la masse de Dirac en a.*

Démonstration. Soit T une distribution dont le support est réduit à $\{a\}$. On sait d'après la Proposition B.3.12 que T est d'ordre fini, noté m. D'après la formule de Taylor, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(a) + R(x)$$

avec pour tout α tel que $|\alpha| \leq m$,

$$\partial^\alpha R(a) = 0\,.$$

Alors par la Proposition B.3.13 on a

$$\langle T, R\rangle = 0\,.$$

En utilisant le Théorème B.3.15 pour donner un sens à $\langle T, (x-a)^\alpha\rangle$, on a donc

$$\begin{aligned}\langle T,\varphi\rangle &= \langle T, \sum_{|\alpha|\leq m}\frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha\varphi(a)\rangle + \langle T, R\rangle\\ &= \sum_{|\alpha|\leq m}\frac{1}{\alpha!}\langle T, (x-a)^\alpha\rangle\,\partial^\alpha\varphi(a)\,.\end{aligned}$$

En d'autres termes on a

$$T = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \langle T, (x-a)^\alpha \rangle \, \partial^\alpha \delta_a \,,$$

et le théorème est démontré. □

Lemme B.4.6. *Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\partial_k T \equiv 0$ pour $k \in \{1, \dots, d\}$. Alors T est une fonction constante.*

Démonstration. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ d'intégrale 1 et soit $\lambda := \langle T, \psi \rangle$. On va montrer que $\langle T, \varphi \rangle = \lambda$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ la fonction

$$\tilde{\varphi} := \varphi - \langle 1, \varphi \rangle \, \psi$$

est d'intégrale nulle. Admettons provisoirement le lemme suivant.

Lemme B.4.7. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction d'intégrale nulle. Alors il existe d fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telles que*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{d} \partial_j \varphi_j \,.$$

Du lemme ci-dessus on déduit qu'il existe d fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\tilde{\varphi} = \sum_{j=1}^{d} \partial_j \varphi_j \,.$$

Alors

$$\langle T - \lambda, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle T, \psi \rangle \langle 1, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle$$

donc

$$\langle T - \lambda, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{d} \langle T, \partial_j \varphi_j \rangle = - \sum_{j=1}^{d} \langle \partial_j T, \varphi_j \rangle = 0 \,.$$

Le Lemme B.4.6 est démontré. □

Démonstration du Lemme B.4.7. On raisonne par récurrence sur la dimension d. Dans le cas où $d = 1$, la fonction

$$\varphi_1(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(y) \, dy$$

est de classe C^∞, à support compact, et elle vérifie $\varphi = \varphi_1'$.

Supposons maintenant le résultat vrai en dimension $d-1$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ de moyenne nulle. Il n'est pas difficile de voir que la fonction

$$\psi(x_1, \dots, x_{d-1}) := \int \varphi(x_1, \dots, x_{d-1}, y) \, dy$$

est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1})$ de moyenne nulle donc par l'hypothèse de récurrence il existe $\psi_1, \dots, \psi_{d-1}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{d-1})$ telles que

$$\psi = \sum_{j=1}^{d-1} \partial_j \psi_j \,.$$

Soit alors $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction d'intégrale 1 et considérons la fonction Φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\Phi(x_1, \dots, x_d) := \int_{-\infty}^{x_d} \Big(\varphi(x_1, \dots, x_{d-1}, y) - \psi(x_1, \dots, x_{d-1}) \rho(y) \Big) \, dy \,.$$

On a alors

$$\partial_d \Phi(x_1, \ldots, x_d) = \varphi(x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d) - \psi(x_1, \ldots, x_{d-1})\rho(x_d)$$

donc

$$\varphi(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{j=1}^{d-1} \partial_j(\psi_j(x_1, \ldots, x_{d-1})\rho(x_d)) + \partial_d \Phi(x_1, \ldots, x_d) .$$

Le lemme est démontré. □

Dans l'énoncé suivant, pour tout $y \in \mathbb{R}^p$ la notation

$$\big\langle T, \varphi(\cdot, y)\big\rangle$$

désigne $\langle T, \varphi_y\rangle$ où $\varphi_y \in \mathcal{D}(\Omega)$ est la fonction définie par

$$\varphi_y(x) := \varphi(x, y) .$$

Proposition B.4.8 (Dérivation sous le crochet)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et K un compact de Ω. Soit T une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et φ une fonction de $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^p)$ telle que pour tout $y \in \mathbb{R}^p$, φ_y soit à support dans K. Alors la fonction*

$$F \,:\, y \longmapsto \big\langle T, \varphi(\cdot, y)\big\rangle$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^p$ et l'on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^p$ et tout $y \in \mathbb{R}^p$

$$\partial_y^\alpha F(y) = \big\langle T, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y)\big\rangle .$$

Démonstration. Commençons par démontrer le résultat pour $|\alpha| = 1$. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^p$, nous allons montrer que la différentielle de F en y_0 est l'application

$$h \in \mathbb{R}^p \longmapsto \big\langle T, \nabla_y \varphi(\cdot, y_0) \cdot h\big\rangle .$$

Soit donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^p$ convergeant vers 0 et montrons que la suite

$$\frac{1}{|h_n|}\Big(F(y_0 + h_n) - F(y_0) - \big\langle T, \nabla_y \varphi(\cdot, y_0) \cdot h_n\big\rangle\Big)$$

converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Il suffit de remarquer que la suite de fonctions

$$\varphi_n(x) := \frac{1}{|h_n|}\Big(\varphi(x, y_0 + h_n) - \varphi(x, y_0) - \nabla_y \varphi(x, y_0) \cdot h_n\Big)$$

converge vers la fonction nulle dans $\mathcal{D}(\Omega)$. On a donc

$$\langle T, \varphi_n\rangle \to 0 , \quad n \to \infty$$

donc F est différentiable sur $\mathbb{R}^p$ et ses dérivées partielles sont

$$\partial_{y_j} F(y) = \langle T, \partial_{y_j} \varphi(\cdot, y)\rangle$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^p$. L'argument s'itère par récurrence sur l'ordre de dérivation (en itérant la formule de Taylor pour obtenir la continuité, puis la différentiabilité à l'ordre suivant). □

Proposition B.4.9 (Intégration sous le crochet)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, T une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et φ une fonction de $\mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R}^p)$. Alors*

$$\int \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle \, dy = \langle T, \int \varphi(\cdot, y) \, dy\rangle .$$

Démonstration. On traite le cas $d = p = 1$, le cas général s'obtient ensuite par récurrence sur p en utilisant le théorème de Fubini. Soit R un réel positif tel que φ soit à support dans $[-R, R]^2$.

Soit ζ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ d'intégrale 1, supportée dans $[-R, R]$, et soit

$$\psi(x, y) := \varphi(x, y) - \zeta(y) \int \varphi(x, y')\, dy' .$$

Cette fonction est de classe C^∞ sur $\Omega \times \mathbb{R}$, à support dans $[-R, R]^2$, et

$$\int \psi(x, y)\, dy = 0$$

pour tout $x \in \Omega$. Alors la fonction

$$\Phi(x, y) := \int_{-\infty}^{y} \psi(x, y')\, dy'$$

est aussi C^∞ sur $\Omega \times \mathbb{R}$, à support dans $[-R, R]^2$. Par la Proposition B.4.8 on a

$$\frac{d}{dy} \langle T, \Phi(\cdot, y)\rangle = \langle T, \partial_y \Phi(\cdot, y)\rangle = \langle T, \psi(\cdot, y)\rangle$$

d'où l'on déduit que l'application

$$y \longmapsto \langle T, \Phi(\cdot, y)\rangle - \int_{-\infty}^{y} \langle T, \psi(\cdot, y')\rangle\, dy'$$

est constante. Mais $y \longmapsto \langle T, \Phi(\cdot, y)\rangle$ et $y \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{y} \langle T, \psi(\cdot, y')\rangle\, dy'$ sont identiquement nulles pour $y < -R$, donc ces deux fonctions sont égales. En particulier

$$\int \langle T, \psi(\cdot, y)\rangle\, dy = 0$$

et donc

$$\begin{aligned}
0 &= \int \langle T, \psi(\cdot, y)\rangle\, dy \\
&= \int \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle\, dy - \langle T, \int \varphi(\cdot, y')\, dy'\rangle \int \zeta(y)\, dy \\
&= \int \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle\, dy - \langle T, \int \varphi(\cdot, y)\, dy\rangle
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

La proposition suivante s'obtient en appliquant les règles de calcul différentiel usuel, par dualité.

Proposition B.4.10. *Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et soit T une distribution dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors pour toute fonction f de $C^\infty(\Omega)$ on a*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad \partial^\alpha (fT) = \sum_{\beta \le \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^{\alpha-\beta} f\, \partial^\beta T .$$

Pour tout difféomorphisme $\phi \in C^\infty(\Omega', \Omega)$ on définit

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T \circ \phi, \varphi\rangle := \left\langle T, \varphi \circ \phi^{-1} \left| det\, D\phi(\phi^{-1})\right|^{-1} \right\rangle,$$

où $D\phi(x)$ est la matrice jacobienne de ϕ au point $x \in \Omega'$. On a $T \circ \phi \in \mathcal{D}'(\Omega')$ et

$$\partial_j (T \circ \phi) = \sum_{k=1}^{d} (\partial_j \phi_k)(\partial_k T \circ \phi) .$$

B.5. Exemples

B.5.1. Mesures de Radon.

Définition B.5.1. *Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite positive si pour toute fonction φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ on a*

$$\varphi \geq 0 \text{ dans } \Omega \implies \langle T, \varphi \rangle \geq 0 \, .$$

Théorème B.5.2 (Ordre des distributions positives)**.** *Si T est une distribution positive sur Ω alors T est d'ordre 0.*

Démonstration. Soit K un compact de Ω et soit ψ une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ à valeurs dans $[0, 1]$ et égale à 1 sur K. Pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ supportée dans K on a

$$\forall x \in \Omega \, , \quad -\sup_{y \in K} |\varphi(y)| \, \psi(x) \leq \varphi(x) \leq \sup_{y \in K} |\varphi(y)| \, \psi(x) \, .$$

Comme T est positive on en déduit que

$$\big|\langle T, \varphi \rangle\big| \leq \langle T, \psi \rangle \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \, ,$$

et on a le résultat cherché. □

Définition B.5.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et K un compact de Ω. On note $\mathcal{M}(K)$ (resp. $\mathcal{M}_{loc}(\Omega)$) l'ensemble des formes linéaires continues sur $C(K)$ (resp. $C_c(\Omega)$ muni de sa topologie inductive). L'espace $\mathcal{M}_{loc}(\Omega)$ est appelé espace des mesures de Radon. Une forme linéaire T sur $C_c(\Omega)$ est donc une mesure de Radon si et seulement si pour tout K compact de Ω, il existe une constante C telle que pour toute fonction $\varphi \in C_K(\Omega)$*

$$\big|\langle T, \varphi \rangle\big| \leq C \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \, .$$

On rappelle qu'une mesure borélienne sur un compact K de $\mathbb{R}^d$ est une fonction positive, σ-additive sur la tribu borélienne de K. On admet le théorème suivant.

Théorème B.5.4 (Riesz(-Radon-Markov) ($\sim$ 1913))**.** *Soit μ une mesure borélienne localement finie sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$. On définit la mesure de Radon positive T_μ sur $C_c(\Omega)$ par*

$$\langle T_\mu, f \rangle := \int_\Omega f \, d\mu \, , \quad \forall f \in C_c(\Omega) \, .$$

Inversement pour toute mesure de Radon positive T sur $C_c(\Omega)$ il existe une unique mesure borélienne localement finie μ sur Ω telle que $T = T_\mu$.

Théorème B.5.5. *Si T est une distribution positive sur Ω alors T est une mesure de Radon positive.*

Démonstration. Vérifions que T se prolonge de manière unique en une forme linéaire positive continue sur $C_c(\Omega)$. Le Théorème B.5.2 implique que pour tout compact K il existe une constante C telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ supportée dans K on a

$$\big|\langle T, \varphi \rangle\big| \leq C \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \, .$$

On conclut alors par densité : si $g \in C_c(\Omega)$ est à support dans un compact K de Ω on considère une suite (g_n) dans $\mathcal{D}(\Omega)$, supportée dans K et qui converge uniformément vers g. La suite $(\langle T, g_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et on définit un prolongement de T à $C_c(\Omega)$ par la distribution

$$\langle \overline{T}, g \rangle := \lim_{n \to \infty} \langle T, g_n \rangle \, .$$

La positivité de $\overline{T}$ se vérifie facilement, il reste à vérifier que le prolongement est unique. Soit S une forme linéaire positive sur $C_c(\Omega)$ (qui est donc une forme linéaire continue pour la convergence uniforme par les mêmes arguments que ci-dessus pour le théorème B.5.2) qui coïncide avec T sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors S et $\overline{T}$ coïncident sur $C^\infty_K(\Omega)$ pour tout compact K puisque S et $\overline{T}$ coïncident avec T sur tout compact ; il suffit donc de choisir pour K une suite exhaustive de compacts. □

B.5.2. Mesure de surface et distributions de simple couche. Dans ce paragraphe nous donnons quelques exemples de mesures de surface, sans donner tous les détails des calculs qui relèvent de la géométrie différentielle. On considère une hypersurface Σ de $\mathbb{R}^d$ définie par une équation de la forme

$$x_d = f(x_1, \dots, x_{d-1}) \quad \text{avec} \quad f \in C^1(\Omega')$$

où Ω' est un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$. Alors en notant $x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$, l'élément de surface sur Σ est donné en $(x', f(x'))$ par

$$d\sigma := \sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2}\, dx' \,. \tag{B.6}$$

Etant donnée une fonction $\gamma \in C(\Sigma)$, la forme linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \int_\Sigma \varphi\gamma\, d\sigma \end{aligned}$$

est une distribution d'ordre 0. On l'appelle distribution de simple couche de densité γ portée par Σ. Dans le cas particulier où $\gamma = 1$, on appelle la distribution de simple couche correspondante la mesure de surface portée par Σ. On la note parfois σ.

B.5.3. Formule des sauts. On rappelle que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert à bord de classe C^r, avec $r \geq 1$, si sa frontière $\partial\Omega$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^d$ de classe C^r, et localement Ω est d'un seul côté de sa frontière. Plus précisément pour tout $x \in \partial\Omega$ il existe un ouvert ω contenant x et une fonction $\rho \in C^r(\omega)$ dont le gradient ne s'annule pas dans ω, tels que

$$\partial\Omega \cap \omega = \big\{x \in \omega \,/\, \rho(x) = 0\big\} \quad \text{et} \quad \Omega \cap \omega = \big\{x \in \omega \,/\, \rho(x) < 0\big\} \,.$$

Le vecteur unitaire normal au point $x \in \partial\Omega$ pointant vers l'extérieur de Ω est donné par (on admet que cela ne dépend pas du choix de la fonction ρ)

$$\nu(y) := \frac{\nabla\rho(y)}{|\nabla\rho(y)|} \,, \quad y \in \partial\Omega \cap \omega \,.$$

Localement toute surface est un graphe, et des résultats globaux peuvent être obtenus en recollant les résultats locaux grâce à des partitions de l'unité. Pour rester dans un cadre simple nous ne rentrerons pas dans ces considérations ici.

Le résultat suivant est une généralisation de la formule de Green-Riemann en dimension quelconque.

Théorème B.5.6 (formule de Green ($\sim$ 1830))**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord de classe C^1 et soit V un champ de vecteurs de classe C^1 à support compact sur $\overline{\Omega}$. Alors*

$$\int_\Omega \operatorname{div} V\, dx = \int_{\partial\Omega} V \cdot \nu\, d\sigma$$

où ν est le vecteur unitaire normal au point x de $\partial\Omega$ pointant vers l'extérieur de Ω et où $d\sigma$ est l'élément de surface sur $\partial\Omega$.

Ce théorème s'interprète au sens des distributions de la manière suivante.

Théorème B.5.7 (formule de Green dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord de classe C^2. Alors pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$ on a*

$$\partial_j(\mathbf{1}_\Omega) = -\nu_j\, \sigma\,,$$

où ν est le vecteur unitaire normal au point x de $\partial\Omega$ pointant vers l'extérieur de Ω et où $\sigma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est la distribution de simple couche portée par $\partial\Omega$.

Remarque. En fait le vecteur ν n'est pas une fonction régulière donc il faudrait généraliser la notion de produit d'une fonction f et d'une distribution T pour donner un sens à $\nu_j\sigma$. On remarque tout d'abord qu'il suffit que la fonction f soit bien définie au voisinage du support de T, ce qui est le cas ici (voir le lemme suivant) ; par ailleurs soit on suppose que le bord est de classe C^∞, soit on généralise le produit en remarquant qu'il suffit que f soit de classe C^k si T est d'ordre k. Nous ne détaillerons pas ce point ici.

Avant de démontrer le Théorème B.5.7, montrons deux lemmes préparatoires.

Lemme B.5.8. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord de classe C^1, alors pour tout $1 \leq j \leq d$, le support de la distribution $\partial_j(\mathbf{1}_\Omega)$ est inclus dans $\partial\Omega$.*

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$B_\infty(x_0, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^d\,,\ \max_{1 \leq j \leq d} |x_j - x_{0,j}| < \delta\}$$

soit inclus dans $\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$. Soit alors $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ supportée dans $B_\infty(x_0, \delta)$, on a

$$\langle \partial_j(\mathbf{1}_\Omega), \varphi \rangle = -\int_\Omega \partial_j\varphi(x)\, dx\,.$$

D'une part si $x_0 \notin \Omega$ alors $B_\infty(x_0, \delta) \cap \Omega = \emptyset$ donc cette intégrale est nulle. D'autre part si $x_0 \in \Omega$ alors $B_\infty(x_0, \delta) \subset \Omega$ et en notant $x' := (x_1, \ldots, x_{j-1}, , x_{j+1}, \ldots, x_d)$, on a par le théorème de Fubini

$$\langle \partial_j(\mathbf{1}_\Omega), \varphi \rangle = -\int \ldots \int \Big(\int_{x_{0,j}-\delta}^{x_{0,j}+\delta} \partial_j\varphi(x)\, dx_j \Big) dx' = 0\,.$$

On a donc $x_0 \notin \operatorname{Supp} \partial_j(\mathbf{1}_\Omega)$ et le résultat suit. □

Lemme B.5.9. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord de classe C^2, et soit ν le vecteur unitaire normal de $\partial\Omega$ pointant vers l'extérieur de Ω. Alors la mesure de surface* (B.6) *sur $\partial\Omega$ est la distribution*

$$\sigma = -\nu \cdot \nabla \mathbf{1}_\Omega\,.$$

Démonstration. On démontre le résultat en dimension 2 pour simplifier, avec le bord de Ω défini par le graphe $x_2 = f(x_1)$ avec f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et on a donc

$$\Omega = \Big\{ x \in \mathbb{R}^2 \,/\, \rho(x) := x_2 - f(x_1) < 0 \Big\}\,.$$

On note que

$$\nabla\rho(x) = \begin{pmatrix} -f'(x_1) \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, montrons que

$$\langle -\nu \cdot \nabla \mathbf{1}_\Omega, \varphi \rangle = \int \varphi(x_1, f(x_1)) \sqrt{f'(x_1)^2 + 1}\, dx_1\,.$$

On a

$$I := \langle -\nu \cdot \nabla \mathbf{1}_\Omega, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega \partial_j \Big(\frac{\partial_j \rho(x)}{|\nabla\rho(x)|} \varphi(x) \Big)\, dx\,.$$

On peut supposer que φ est nulle à l'exterieur d'un petit voisinage de $\partial\Omega$ et en notant $\operatorname{Supp}\varphi \subset [-R,R]^2$ on peut écrire

$$I = I_1 + I_2$$

avec

$$I_1 := \int_{-R}^{R} \int_{-R}^{f(x_1)} \partial_1 \Big(\frac{\partial_1 \rho(x)}{|\nabla \rho(x)|} \varphi(x) \Big)\, dx_2 dx_1 \quad \text{et} \quad I_2 := \int_{-R}^{R} \int_{-R}^{f(x_1)} \partial_2 \Big(\frac{\partial_2 \rho(x)}{|\nabla \rho(x)|} \varphi(x) \Big)\, dx_2 dx_1 \, .$$

D'une part on a

$$I_2 = \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x_1, f(x_1))}{|\nabla \rho(x_1, f(x_1))|}\, dx_1 \, .$$

Par ailleurs on peut écrire

$$I_1 = \int_{-R}^{R} \partial_1 \Big(\int_{-R}^{f(x_1)} \frac{\partial_1 \rho(x_1,x_2)}{|\nabla \rho(x_1,x_2)|} \varphi(x_1,x_2)\, dx_2 \Big) dx_1 - \int_{-R}^{R} f'(x_1) \frac{\partial_1 \rho(x_1, f(x_1))}{|\nabla \rho(x_1, f(x_1))|} \varphi(x_1, f(x_1))\, dx_1 \, .$$

La première intégrale est nulle, et donc

$$\begin{aligned} I &= -\int_{-R}^{R} f'(x_1) \frac{\partial_1 \rho(x_1, f(x_1))}{|\nabla \rho(x_1, f(x_1))|} \varphi(x_1, f(x_1))\, dx_1 + \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x_1, f(x_1))}{|\nabla \rho(x_1, f(x_1))|}\, dx_1 \\ &= \int_{-R}^{R} \frac{f'(x_1)^2 + 1}{|\nabla \rho(x_1, f(x_1))|} \varphi(x_1, f(x_1))\, dx_1 \\ &= \int_{-R}^{R} \varphi(x_1, f(x_1)) \sqrt{f'(x_1)^2 + 1}\, dx_1 \, . \end{aligned}$$

Le lemme est démontré. □

Démonstration du théorème B.5.7. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $[0,1]$, égale à 1 si $x \leq -1$ et nulle si $x \geq 0$. Soit ρ une fonction définissant le bord de Ω. On pose pour tout $R > 0$

$$\chi_R(x) := \chi(R\rho(x)) \, .$$

Le théorème de convergence dominée implique que

$$\chi_R \longrightarrow \mathbf{1}_\Omega \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \, , \quad R \to \infty \, .$$

On a alors grâce au Lemme B.5.9

$$-\nu_j \, \nu \cdot \nabla \chi_R \longrightarrow \nu_j \sigma \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \, , \quad R \to \infty \, .$$

Il reste donc à montrer que

$$-\nu_j \, \nu \cdot \nabla \chi_R \longrightarrow \partial_j \mathbf{1}_\Omega \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \, , \quad R \to \infty \, .$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, supportée près de $\partial\Omega$, on a

$$\langle -\nu_j \, \nu \cdot \nabla \chi_R, \varphi \rangle = -R \int \chi'(R\rho(x)) \nu(x) \cdot \nabla \rho(x) \nu_j(x) \varphi(x)\, dx \, .$$

Mais

$$\nu(x) \cdot \nabla \rho(x) = |\nabla \rho(x)|$$

donc

$$\langle -\nu_j \, \nu \cdot \nabla \chi_R, \varphi \rangle = -R \int \chi'(R\rho(x)) \partial_j \rho(x) \varphi(x)\, dx$$

et donc

$$\langle -\nu_j \, \nu \cdot \nabla \chi_R, \varphi \rangle = \int \partial_j (\chi_R(x)) \varphi(x)\, dx = \langle \partial_j \chi_R, \varphi \rangle$$

et le résultat suit en prenant la limite $R \to \infty$. □

Exercice. Soit f de classe C^1 par morceaux sur l'intervalle $]a,b[$. On note par $(a_i)_{0\leq i\leq N}$ l'ensemble des points de $[a,b]$ (avec $a_0 = a$ et $a_n = b$) tels que dans chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$, la fonction f est de classe C^1 et f se prolonge continûment dans les intervalles $]a_0, a_1], \dots, [a_i, a_{i+1}], \dots, [a_{N-1}, a_N[$. On note $f(a_i \pm 0)$ les limites à droite et à gauche de f' au point a_i. On a alors

$$f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{N-1} [f(a_i+0) - f(a_i-0)]\delta_{a_i}$$

où $\{f'\}$ est la fonction continue par morceaux dérivée usuelle en dehors des points a_i.

On en déduit facilement la formule des sauts suivante.

Théorème B.5.10 (formule des sauts dans $\mathbb{R}^d$)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord de classe C^2 et f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$, telle que*

a) la restriction de f à Ω se prolonge en une fonction de classe C^1 sur un voisinage ouvert de $\overline{\Omega}$

b) la restriction de f à $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur un voisinage ouvert de $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$.

Alors la fonction f est localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et on a dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$,

$$\partial_{x_j} f = \{\partial_{x_j} f\} + [f]_{\partial\Omega}\, \nu_j \sigma\,, \quad \forall 1 \leq j \leq d$$

où $\{\partial_{x_j} f\}$ est la fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}^d$ définie par $\{\partial_{x_j} f\}(x) = \partial_{x_j} f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$ et $[f]_{\partial\Omega}$ est le saut de f à travers l'hypersurface $\partial\Omega$ dans la direction ν :

$$[f]_{\partial\Omega}(x) = \lim_{t\to 0^+} \left(f(x+t\nu(x)) - f(x-t\nu(x))\right), \quad x \in \partial\Omega\,.$$

B.6. Produit de convolution

Définition B.6.1 (Produit de convolution $\mathcal{D}' \star \mathcal{D}$)**.** *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on définit pour tout $x \in \mathbb{R}^d$*

$$T \star \varphi(x) := \langle T, \varphi(x-\cdot)\rangle = \langle T, (\tau_x)_* \check{\varphi}\rangle\,,$$

où $\check{\varphi}(x) := \varphi(-x)$, τ_x est la translation de vecteur x : $\tau_x(y) := y + x$ et

$$(\tau_x)_* f(y) := f \circ \tau_{-x} = f(y-x)\,.$$

Exercice. Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\mathrm{Supp}\,(T \star \varphi) \subset \overline{\mathrm{Supp}\,(T) + \mathrm{Supp}\,(\varphi)}\,.$$

Exemple. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et tout $a \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\delta_a \star \varphi(x) = \varphi(x-a)\,.$$

Proposition B.6.2. *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, le produit de convolution $T \star \varphi$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, et on a*

$$\partial^\alpha (T \star \varphi) = (\partial^\alpha T) \star \varphi = T \star (\partial^\alpha \varphi)\,.$$

En particulier si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ alors $T \star \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. On a d'une part

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha T)\star\varphi(x) &= \langle \partial^\alpha T, \varphi(x-\cdot)\rangle\\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha(\varphi(x-\cdot))\rangle\\ &= \langle T, (\partial^\alpha\varphi)(x-\cdot)\rangle\\ &= T\star\partial^\alpha\varphi\,.\end{aligned}$$

D'autre part soit $a\in\mathbb{R}^d$ et montrons que $T\star\varphi$ est de classe C^∞ sur $B(a,1)$. Soit $\chi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi\equiv 1$ sur $B(a,1)$. Alors la fonction

$$(x,y)\longmapsto \chi(x)\varphi(x-y)$$

est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et à support dans $\operatorname{Supp}\chi\times(\operatorname{Supp}\chi+\operatorname{Supp}\varphi)$. D'après la Proposition B.4.8 la fonction

$$F\,:\,x\longmapsto \langle T, \chi(x)\varphi(x-\cdot)\rangle$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et

$$\partial^\alpha\big\langle T,\chi(x)\varphi(x-\cdot)\big\rangle = \big\langle T, \partial^\alpha(\chi(x)\varphi(x-\cdot))\big\rangle\,.$$

Comme la fonction F coïncide avec $T\star\varphi$ sur $B(a,1)$, on en déduit que $T\star\varphi$ est de classe C^∞ sur $B(a,1)$ et

$$T\star\partial^\alpha\varphi = \partial^\alpha(T\star\varphi)$$

sur $B(a,1)$. La conclusion vient du fait que ce résultat est vrai pour tout $a\in\mathbb{R}^d$. □

Remarque. Le même argument permet de définir le produit de convolution d'une distribution $S\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ par une fonction $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et on a $S\star\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Théorème B.6.3. *Soit T une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $(\zeta_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)}$ une suite régularisante. Soit $T_\varepsilon := T\star\zeta_\varepsilon$. Alors pour tout $\varepsilon>0$ on a $T_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et*

$$T_\varepsilon\longrightarrow T\quad\textit{dans}\quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)\,,\quad \varepsilon\to 0\,.$$

Démonstration. D'après la Proposition B.6.2 on sait que $T_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs grâce à la Proposition B.4.9 on a pour toute fonction $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}\langle T_\varepsilon,\varphi\rangle &= \int T_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx\\ &= \int\langle T,\zeta_\varepsilon(x-\cdot)\varphi(x)\rangle\,dx\\ &= \langle T, \int\zeta_\varepsilon(x-\cdot)\varphi(x)\,dx\rangle\,.\end{aligned}$$

Mais

$$\int\zeta_\varepsilon(x-y)\varphi(x)\,dx = \check{\zeta}_\varepsilon\star\varphi(y)$$

donc

$$\langle T_\varepsilon,\varphi\rangle = \langle T, \check{\zeta}_\varepsilon\star\varphi\rangle\,.$$

Par ailleurs si R est tel que $\operatorname{Supp}\zeta\subset B(0,R)$, alors pour $\varepsilon\in(0,1)$ on a

$$\operatorname{Supp}(\check{\zeta}_\varepsilon\star\varphi)\subset K := \{y\in\mathbb{R}^d\,/\,\operatorname{dist}(y,\operatorname{Supp}\varphi)\le R\}\,.$$

Comme par ailleurs

$$\partial^\alpha(\check{\zeta}_\varepsilon\star\varphi) = \check{\zeta}_\varepsilon\star\partial^\alpha\varphi$$

d'après le Théorème B.1.2 on a

$$\partial^\alpha(\check{\zeta}_\varepsilon\star\varphi)\longrightarrow\partial^\alpha\varphi$$

uniformément sur K lorsque $\varepsilon \to 0$. Par continuité séquentielle des distributions (Proposition B.3.2) on a donc pour toute suite $\varepsilon_n \to 0$

$$\langle T_{\varepsilon_n}, \varphi\rangle = \langle T, \check{\zeta}_{\varepsilon_n} \star \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle\,, \quad n \to \infty$$

donc $T_{\varepsilon_n} \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Le théorème est démontré. □

Définition B.6.4 (Produit de convolution $\mathcal{D}' \star \mathcal{E}'$)**.** *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. On définit le produit de convolution $T \star S$ par la distribution*

$$\langle T \star S, \varphi\rangle := \langle T, \check{S} \star \varphi\rangle\,,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, où la distribution $\check{S}$ est définie par

$$\langle \check{S}, \psi\rangle := \langle S, \check{\psi}\rangle\,, \quad \check{\psi}(x) := \psi(-x)\,.$$

Exemple. Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et tout $a \in \mathbb{R}^d$ on a

$$T \star \delta_a = T \circ \tau_{-a}\,.$$

Théorème B.6.5. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a*

$$\partial^\alpha(T \star S) = (\partial^\alpha T) \star S = T \star (\partial^\alpha S)\,.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha(T \star S), \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle T \star S, \partial^\alpha \varphi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}\langle T, \check{S} \star \partial^\alpha \varphi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}\big\langle T, \partial^\alpha(\check{S} \star \varphi)\big\rangle \\
&= \langle \partial^\alpha T, \check{S} \star \varphi\rangle \\
&= \big\langle (\partial^\alpha T) \star S, \varphi\big\rangle\,,
\end{aligned}$$

donc

$$\partial^\alpha(T \star S) = (\partial^\alpha T) \star S\,.$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned}
(-1)^{|\alpha|}\big\langle T, \partial^\alpha(\check{S} \star \varphi)\big\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle T, (\partial^\alpha \check{S}) \star \varphi\rangle \\
&= \big\langle T, (\partial^\alpha S)\check{} \star \varphi\big\rangle\,,
\end{aligned}$$

donc

$$\partial^\alpha(T \star S) = T \star (\partial^\alpha S)\,.$$

Le théorème est démontré. □

Exemple. On a $T \star \partial^\alpha \delta_0 = \partial^\alpha T$.

Exercice. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\mathrm{Supp}\,(T \star S) \subset \overline{\mathrm{Supp}\,(T) + \mathrm{Supp}\,(S)}\,.$$

Proposition B.6.6. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ convergeant au sens des distributions vers $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,*

$$\partial^\alpha(T_n \star \varphi) \longrightarrow \partial^\alpha(T \star \varphi)$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$ lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $T = 0$ et que $|\alpha| = 0$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$T_n \star \varphi(x) = \langle T_n, \varphi(x - \cdot)\rangle \longrightarrow 0\,, \quad n \to \infty\,. \tag{B.7}$$

Soit $R > 0$ fixé et montrons que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\leq R} |(T_n \star \varphi)(x)| = 0\,. \tag{B.8}$$

Par l'absurde, sinon il existerait $\varepsilon > 0$ et (x_n) une suite de $\overline{B(0,R)}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|T_n \star \varphi(x_n)| > \varepsilon\,.$$

Par compacité de $\overline{B(0,R)}$ quitte à extraire une sous-suite la suite (x_n) converge vers une limite $\overline{x}$ dans $\overline{B(0,R)}$. Soit le compact $K := \operatorname{supp}\varphi + \overline{B(0,R)}$. Alors par le théorème de Banach-Steinhaus il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support dans K,

$$\begin{aligned}\sup_{|x|\leq R} |T_n \star \psi(x)| &= \sup_{|x|\leq R} |\langle T_n, \psi(x - \cdot)\rangle| \\ &\leq C \max_{|\alpha|\leq p} \sup_{y\in K} |\partial^\alpha \psi(y)|\,.\end{aligned} \tag{B.9}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}|T_n \star \varphi(\overline{x})| &\geq |T_n \star \varphi(x_n)| - \big|T_n \star \varphi(x_n) - T_n \star \varphi(\overline{x})\big| \\ &\geq \varepsilon - d|x_n - \overline{x}| \max_{1\leq j\leq d} \sup_{|x|\leq R} |T_n \star \partial_j \varphi(x)|\end{aligned}$$

par l'inégalité des accroissements finis, donc par (B.9) il vient

$$\begin{aligned}|T_n \star \varphi(\overline{x})| &\geq \varepsilon - Cd|x_n - \overline{x}| \max_{1\leq j\leq d} \max_{|\alpha|\leq p} \sup_{y\in K} |\partial^\alpha \partial_j \varphi(y)| \\ &\geq \varepsilon - C'|x_n - \overline{x}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\cdot\end{aligned}$$

Ceci est en contradiction avec (B.7), et on en conclut que (B.8) est vraie. D'où le résultat. □

Proposition B.6.7. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\langle T, \check{S} \star \varphi\rangle = \langle S, \check{T} \star \varphi\rangle$$

et donc si on définit $S \star T$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,, \quad \langle S \star T, \varphi\rangle = \langle S, \check{T} \star \varphi\rangle\,,$$

on a $T \star S = S \star T$.

Démonstration. Soit ζ_ε une suite régularisante et soit

$$S_\varepsilon := S \star \zeta_\varepsilon\,.$$

Alors S_ε est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et à support dans $\operatorname{Supp} S + \overline{B(0,\varepsilon)}$, qui est compact. On écrit alors

$$\begin{aligned}\langle S_\varepsilon, \check{T} \star \varphi\rangle &= \int S_\varepsilon(x)\langle \check{T}, \varphi(x - \cdot)\rangle\, dx \\ &= \int S_\varepsilon(x)\langle T, \varphi(x + \cdot)\rangle\, dx \\ &= \langle T, \int S_\varepsilon(x)\varphi(x + \cdot)\, dx\rangle \\ &= \langle T, \int S_\varepsilon(-x)\varphi(-x + \cdot)\, dx\rangle \\ &= \langle T, \check{S}_\varepsilon \star \varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

Il reste à passer à la limite en ε. On sait que S_ε converge vers S dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, et que le support de S_ε est inclus dans un compact fixe, par exemple $\operatorname{Supp} S + \overline{B(0,1)}$. Si χ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ égale à 1 sur un voisinage ouvert de $\operatorname{Supp} S + \overline{B(0,1)}$ alors

$$\langle S_\varepsilon, \check{T} \star \varphi\rangle = \langle S_\varepsilon, \chi(\check{T} \star \varphi)\rangle \longrightarrow \langle S, \chi(\check{T} \star \varphi)\rangle = \langle S, \check{T} \star \varphi\rangle \,.$$

Par ailleurs le support de $\check{S}_\varepsilon \star \varphi$ est inclus dans le compact $K := \operatorname{Supp} \varphi + \operatorname{Supp} S + \overline{B(0,1)}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a grâce à la Proposition B.6.6

$$\partial^\alpha(\check{S}_\varepsilon \star \varphi) = \check{S}_\varepsilon \star (\partial^\alpha \varphi) \longrightarrow \check{S} \star (\partial^\alpha \varphi) = \partial^\alpha(\check{S} \star \varphi)\,,$$

uniformément sur K. On en déduit que

$$\langle T, \check{S}_\varepsilon \star \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \check{S} \star \varphi\rangle$$

et la proposition suit. □

Exercice. Si T_1, T_2, T_3 sont trois distributions dont au moins deux sont à support compact, alors

$$T_1 \star (T_2 \star T_3) = (T_1 \star T_2) \star T_3\,.$$

Remarque. Dans l'exercice ci-dessus, il faut prendre garde au fait que le résultat d'associativité énoncé peut être faux si une seule des distributions est à support compact. Par exemple si H est la fonction d'Heaviside

$$H(x) = \mathbf{1}_{x\geq 0}$$

alors (voir l'exercice page 43 pour la dérivée de H au sens des distributions)

$$(1 \star \delta_0') \star H = 1' \star H = 0 \quad \text{mais} \quad 1 \star (\delta_0' \star H) = 1 \star H' = 1 \star \delta_0 = 1\,.$$

B.7. L'espace de Schwartz et les distributions tempérées

Définition B.7.1 (Espace de Schwartz)**.** *On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'espace (de Schwartz) des fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées : une fonction φ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si pour tous les entiers $m \in \mathbb{N}$, et tous les multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^d$,*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|\langle x\rangle^m \partial^\alpha \varphi(x)\right| < \infty\,,$$

avec $\langle x\rangle := \sqrt{1+|x|^2}$.

Notons que cet ensemble est stable par dérivation, et par multiplication par un polynôme.

Exemples. On a bien sûr $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs toutes les fonctions de la forme

$$P(x)e^{-a|x|^2}$$

avec $a > 0$ et P polynôme, sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ peut être muni d'une topologie en considérant la famille dénombrable suivante de semi-normes : pour tous les entiers $m, j \in \mathbb{N}$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on pose

$$p_{m,j}(\varphi) := \sum_{|\alpha|\leq j} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|\langle x\rangle^m \partial^\alpha \varphi(x)\right|\,. \tag{B.10}$$

Muni de cette famille, l'espace de Schwartz est un espace de Fréchet (la complétude se vérifie facilement puisque toute suite de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^d}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\partial^\alpha f_n$ converge uniformément pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ vers une limite g_α et on identifie facilement que $g_\alpha = \partial^\alpha g_0$).

Proposition B.7.2. *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, à support dans $B(0,2)$, à valeurs dans $[0,1]$, égale à 1 sur $\overline{B(0,1)}$. Pour tout $n \geq 1$ posons

$$\chi_n(x) := \chi\Big(\frac{x}{n}\Big)\cdot$$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et posons

$$\varphi_n := \chi_n \varphi\,.$$

Alors $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est à support dans $B(0,2n)$ et grâce à la formule de Leibniz on montre facilement que, avec la notation (B.10),

$$\big|\langle x\rangle^m \partial^\alpha(\varphi-\varphi_n)(x)\big| \leq \big|\langle x\rangle^m (1-\chi_n(x))\partial^\alpha\varphi(x)\big| + \frac{C}{n} p_{m,j}(\varphi)\,,$$

avec

$$C := 2^j \max_{0<|\beta|\leq j} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\beta \chi(x)|$$

et j est tel que $|\alpha| \leq j$. Comme par ailleurs

$$1-\chi(y) = 0 \text{ si } |y| \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq 1-\chi(y) \leq 1 \text{ si } |y| \geq 1$$

il vient que

$$0 \leq 1-\chi(y) \leq |y|^2$$

et donc

$$\big|\langle x\rangle^m (1-\chi_n(x))\partial^\alpha\varphi(x)\big| \leq \frac{1}{n^2}\langle x\rangle^m \langle x\rangle^2 |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq \frac{1}{n^2} p_{m+2,j}(\varphi)\,.$$

On en conclut que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout α tel que $|\alpha| \leq j$, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \big|\langle x\rangle^m \partial^\alpha(\varphi-\varphi_n)(x)\big| \leq \frac{1}{n^2} p_{m+2,j}(\varphi) + \frac{C}{n} p_{m,j}(\varphi) \longrightarrow 0\,, \quad n\to\infty$$

d'où le résultat. □

Proposition B.7.3 ($\mathcal{E}'\star\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$)**.** *Pour toute distribution E de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et toute fonction φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $E\star\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. D'après la Remarque page 53, $E\star\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ donnés, alors en notant p l'ordre de la distribution à support compact E, et en considérant R un réel tel que le support de E soit contenu dans $B(0,R)$, il vient

$$\begin{aligned}
\big|\langle x\rangle^m \partial^\alpha(E\star\varphi)(x)\big| &= \big|\langle x\rangle^m (E\star\partial^\alpha\varphi)(x)\big| \\
&\leq C\langle x\rangle^m \max_{|\gamma|\leq p+|\alpha|} \sup_{|y|\leq R} |\partial^\gamma\varphi(x-y)| \\
&\leq C \max_{|\gamma|\leq p+|\alpha|} \sup_{|y|\leq R} \big|\langle x-y+y\rangle^m \partial^\gamma\varphi(x-y)\big| \\
&\leq C' \max_{|\gamma|\leq p+|\alpha|} \sup_{y'\in\mathbb{R}^d} \big(\langle y'\rangle^m + (1+R)^m\big)\big|\partial^\gamma\varphi(y')\big|\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tous les entiers m, j, avec la notation (B.10),

$$p_{m,j}(E\star\varphi) \leq C'(1+R^m) p_{m,j+p}(\varphi)\,. \tag{B.11}$$

La proposition est démontrée. □

Définition B.7.4 (Distribution tempérée)**.** *Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire une forme linéaire T telle qu'il existe des entiers m, j et une constante $C > 0$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et avec la notation* (B.10)*,*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C p_{m,j}(\varphi)\,.$$

L'espace des distributions tempérées est noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Proposition B.7.5. *L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation, par multiplication par une fonction C^∞ à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées, et par convolution par une fonction de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. • Montrons que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation. Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $1 \leq k \leq d$ la dérivée $\partial_k S$ est la forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,, \quad \langle \partial_k S, \varphi \rangle = -\langle S, \partial_k \varphi \rangle\,.$$

Comme $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, il existe $m, j \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,, \quad \big|\langle S, \partial_k \varphi \rangle\big| \leq C p_{m,j}(\partial_k \varphi) \leq C p_{m,j+1}(\varphi)\,.$$

Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la forme linéaire $\partial_k S$ s'étend donc de façon unique en une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pour laquelle l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Plus précisément soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors en particulier

$$|\langle \partial_k S, \varphi_n - \varphi_m \rangle| \longrightarrow 0\,, \quad n, m \to \infty\,.$$

La suite $(\langle \partial_k S, \varphi_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers une limite finie, et cette limite définit une forme linéaire S_k sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle S_k, \psi \rangle := \lim_{n\to\infty} \langle \partial_k S, \psi_n \rangle$$

pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, où $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers ψ (on vérifie facilement que la limite ne dépend pas de la suite choisie). Comme la restriction de S_k à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est confondue avec $\partial_k S$ on conclut que $\partial_k S$ peut être prolongée de manière continue en une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, ce qu'il fallait démontrer.

• Le raisonnement est similaire pour la stabilité par multiplication par une fonction f de classe C^∞ à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées. En effet par définition

$$\langle fS, \varphi \rangle = \langle S, f\varphi \rangle$$

et par ailleurs pour tous les entiers m et j il existe un entier $k_j(f)$ et une constante $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\,, \quad p_{m,j}(f\varphi) \leq C p_{m+k_j(f),j}(\varphi)\,.$$

On a alors

$$\big|\langle S, f\varphi \rangle\big| \leq C p_{m+k_j(f),j}(\varphi)$$

et le résultat suit.

• Soit enfin $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, et l'on rappelle que la distribution $S \star E$ est définie comme la forme linéaire

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \longmapsto \langle S, \check{E} \star \varphi \rangle\,.$$

Soit $R > 0$ tel que E soit à support dans $B(0, R)$. Alors c'est aussi le cas pour $\check{E}$ et l'inégalité (B.11) de la démonstration de la Proposition B.7.3, montre que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et tous les entiers m, j, il existe une constante C telle que

$$p_{m,j}(\check{E} \star \varphi) \leq C p_{m,j+p}(\varphi)$$

où p est l'ordre de la distribution à support compact E. Comme la distribution S est tempérée, on en déduit qu'il existe des entiers m, j et une constante C' tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,, \quad |\langle S \star E, \varphi \rangle| \leq C' p_{m,j+p}(\varphi)\,.$$

Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la forme linéaire $S \star E$ s'étend donc de façon unique en une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et l'inégalité ci-dessus est donc vraie pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. La proposition est démontrée. $\square$

Exemples. a) On a $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

b) Toute fonction appartenant à l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p \leq \infty$ définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$.

c) Toute fonction continue à croissance polynômiale définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$.

d) Sur $\mathbb{R}$, la distribution
$$T := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_k$$
est tempérée si la suite (a_k) est à croissance polynômiale, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que
$$a_k = O(|k|^p)\,, \quad |k| \to \infty\,.$$
En effet il existe $C > 0$ tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|a_k| \leq C\langle k\rangle^p$. On écrit alors, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,
$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi\rangle| &\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\rangle^p |\varphi(k)| \\ &\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\langle k\rangle^{p+2}}{\langle k\rangle^2} |\varphi(k)| \\ &\leq C' p_{p+2,0}(\varphi)\,. \end{aligned}$$

e) Les distributions définies par les fonctions
$$x \longmapsto e^x\,,\ \sinh(x) \text{ ou } \cosh(x)$$
ne sont pas des distributions tempérées.

f) La distribution définie par la fonction
$$x \longmapsto e^x e^{ie^x}$$
est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$. En effet on a
$$\frac{d}{dx}(e^{ie^x}) = ie^x e^{ie^x}$$
et la fonction
$$x \longmapsto e^{ie^x}$$
est de classe C^1 et bornée sur $\mathbb{R}$ donc définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

Proposition B.7.6. *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors l'application*
$$x \longmapsto S \star \varphi(x) := \langle S, \varphi(x - \cdot)\rangle$$
est bien définie et appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. En outre $S \star \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soient deux entiers m, j et une constante $C > 0$ tels que
$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\,, \quad |\langle S, \psi\rangle| \leq C p_{m,j}(\psi)\,.$$
On commence par montrer que l'application
$$g : \quad x \longmapsto \langle S, \varphi(x - \cdot)\rangle$$

est bien définie. On a

$$|\langle S, \varphi(x - \cdot)\rangle| \leq C p_{m,j}(\phi_x)\,,$$

avec

$$\phi_x : \quad y \longmapsto \varphi(x-y)\,,$$

et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\begin{aligned}\langle y\rangle^m |\partial^\alpha \phi_x(y)| &= \langle x - y + y\rangle^m |(\partial^\alpha \varphi)(x-y)| \\ &\leq \langle x\rangle^m p_{m,|\alpha|}(\varphi)\end{aligned} \tag{B.12}$$

donc g est bien définie. Montrons que g appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Il s'agit de dériver sous le crochet, mais même si x peut être restreint à un compact, ce n'est pas le cas pour y. On approxime donc φ par une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On sait que l'application

$$g_n : \quad x \longmapsto \langle S, \varphi_n(x - \cdot)\rangle$$

appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d\,, \quad \partial^\alpha g_n(x) = \langle S, (\partial^\alpha \varphi_n)(x - \cdot)\rangle\,.$$

Comme $y \mapsto (\partial^\alpha \varphi_n(x-y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \mapsto \partial^\alpha \varphi(x-y)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ uniformément en x sur tout compact par l'inégalité (B.12), on a le résultat.

Montrons maintenant que $S \star \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On écrit pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}|\langle S \star \varphi, \psi\rangle| &= |\langle S, \check{\varphi} \star \psi\rangle| \\ &\leq C p_{m,j}(\check{\varphi} \star \psi) \\ &\leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{|\alpha|\leq j} \int \langle x-y\rangle^m |\varphi(y-x)| \langle y\rangle^m |\partial^\alpha \psi(y)|\, dy \\ &\leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|\langle\cdot\rangle^m \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|\langle\cdot\rangle^m \psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\,,\end{aligned}$$

La proposition est démontrée. □

B.8. Solutions fondamentales d'opérateurs différentiels

Définition B.8.1. *Un opérateur différentiel sur Ω est une application $\mathbb{C}$-linéaire P de $C^\infty(\Omega)$ dans lui-même définie par une expression de la forme*

$$P\varphi(x) := \sum_{|\alpha|\leq n} a_\alpha(x) \partial^\alpha \varphi(x)$$

sur Ω, avec $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$.

On utilise souvent la notation

$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_d}^{\alpha_d}\,, \quad D_{x_j} := \frac{1}{i}\partial_{x_j}\,.$$

Définition B.8.2. *Soit P un opérateur différentiel sur Ω, de la forme*

$$P\varphi(x) := \sum_{|\alpha|\leq n} b_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x)\,.$$

On appelle symbole de l'opérateur P le polynôme en $\xi_1, \ldots, \xi_d$ à coefficients dans $C^\infty(\Omega)$

$$\sigma(P)(x,\xi) := \sum_{|\alpha|\leq n} b_\alpha(x) \xi^\alpha\,.$$

On appelle ordre de l'opérateur P le degré du polynôme $\sigma(P)$:

$$\textit{ordre de}\, P := \max\{|\alpha| \leq n\,,\ b_\alpha \textit{ est non identiquement nulle sur}\, \Omega\}\,.$$

Les exemples les plus importants d'opérateurs différentiels sont issus de la physique mathématique :

— l'opérateur de transport sur $\mathbb{R}^{1+n} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$

$$\partial_t + \sum_{j=1}^{n} v_j \partial_j = \partial_t + v \cdot \nabla_x \,.$$

— le Laplacien sur $\mathbb{R}^d_x$

$$\Delta := \sum_{j=1}^{d} \partial^2_{x_j x_j} \,.$$

— l'opérateur de la chaleur sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x$

$$\partial_t - \frac{\kappa}{2}\Delta \,.$$

— l'opérateur de Schrödinger sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x$

$$i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta - V \,,$$

où le potentiel V est une fonction $\mathbb{R}^d_x \to \mathbb{R}$.

— le d'Alembertien sur $\mathbb{R}^{1+n} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$

$$\square := \partial^2_{tt} - \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x_j x_j} \,.$$

Définition B.8.3. *Soit $P = P(D_x)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$*

$$P(D_x) := \sum_{|\alpha| \leq n} b_\alpha D^\alpha \,,$$

où les b_α sont des constantes dans $\mathbb{C}$. Une solution fondamentale de $P(D_x)$ est une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$P(D_x)E = \delta_0 \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \,.$$

Remarquons qu'il n'y a en géneral pas unicité de la solution fondamentale. Par exemple si $b_0 \equiv 0$ alors si E est une solution fondamentale, $E + c$ est aussi solution fondamentale pour toute constante c.

Théorème B.8.4. *Soit $P = P(D_x)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$ et soit E une solution fondamentale de $P(D_x)$. Si S est une distribution à support compact alors l'équation aux dérivées partielles*

$$P(D_x)f = S \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

d'inconnue $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ admet au moins une solution, donnée par la formule

$$f = E \star S \,.$$

Démonstration. Le produit de convolution $E \star S$ définit bien une distribution sur $\mathbb{R}^d$ et l'on sait que

$$D^\alpha(E \star S) = (D^\alpha E) \star S \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \,.$$

Comme P est à coefficients constants, on a donc

$$P(D_x)(E \star S) = \big(P(D_x)E\big) \star S = \delta_0 \star S = S \,,$$

d'où le résultat. $\square$

Proposition B.8.5. *Posons*

$$E_1(x) := \frac{1}{2}|x|\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Alors la distribution E_1 est une solution fondamentale du Laplacien dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. On cherche $E_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que

$$E_1'' = \delta_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R})\,.$$

En notant H la fonction d'Heaviside on a

$$E_1' = H + c\,,$$

avec c une constante arbitraire. On en déduit que E_1 est une fonction continue qui s'écrit

$$E_1 = x_+ + cx + c'$$

avec c et c' deux constantes arbitraires. Le cas particulier $c = -\frac{1}{2}$ et $c' = 0$ donne le résultat souhaité. □

Exercice. Posons

$$E_2(x) := \frac{1}{2\pi} \log|x|\,, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,,$$
$$E_d(x) := \frac{1}{c_d} \frac{1}{|x|^{d-2}}\,, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\,,$$

avec $c_d := (d-2)|\mathbb{S}^{d-1}|$. Alors pour tout entier $d \geq 2$, la distribution E_d est une solution fondamentale du Laplacien dans $\mathbb{R}^d$.

Définition B.8.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que T est une distribution harmonique dans Ω si*

$$\Delta T = 0 \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$

Théorème B.8.7. *Toute distribution harmonique dans Ω est une fonction de classe C^∞ dans Ω.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que

$$\Delta T = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$

Soit $a \in \mathbb{R}^d$ et $R > 0$ tels que $B(a, 2R)$ est contenue dans Ω. Montrons que T est une fonction de classe C^∞ dans $B(a, \frac{1}{2}R)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ égale à 1 dans $B(a, R)$ et à support dans $B(a, \frac{3}{2}R)$. Alors $\varphi T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et l'on a

$$\Delta(\varphi T) = 2\nabla\varphi \cdot \nabla T + (\Delta\varphi)T\,.$$

Mais alors φT est une distribution harmonique dans $B(a, R)$. On note par φT le prolongement par 0 de φT en dehors de Ω. Soit ζ_ε une suite régularisante, alors

$$\Delta(\zeta_\varepsilon \star \varphi T) = \zeta_\varepsilon \star \Delta(\varphi T)$$

et donc

$$\operatorname{Supp} \Delta(\zeta_\varepsilon \star \varphi T) \subset \operatorname{Supp} \zeta_\varepsilon + \operatorname{Supp} \Delta(\varphi T) \subset B(0, \varepsilon) + \mathbb{R}^d \setminus B(a, R) = \mathbb{R}^d \setminus B(a, R - \varepsilon)\,.$$

On choisit $\varepsilon < R/4$. Soit Ψ une fonction radiale ($\Psi(x) = \psi(|x|^2)$) à support dans $B(0, R/4)$, d'intégrale 1. Alors comme $\zeta_\varepsilon \star \varphi T$ est harmonique sur $B(a, \frac{3}{4}R)$, la propriété de la moyenne (voir le cours d'Analyse Complexe) implique que

$$\zeta_\varepsilon \star \varphi T(x) = \int_{B(0, \frac{1}{4}R)} (\zeta_\varepsilon \star \varphi T)(x - y)\psi(|y|^2)\, dy = \Psi \star (\zeta_\varepsilon \star \varphi T)(x)$$

pour tout $x \in B(a, \frac{1}{2}R)$. Comme par ailleurs par le Théorème B.6.3

$$\zeta_\varepsilon \star \varphi T \longrightarrow \varphi T$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ quand ε tend vers zéro, par la Proposition B.6.6 on sait que

$$\Psi \star (\zeta_\varepsilon \star \varphi T) \longrightarrow \Psi \star (\varphi T)$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$ quand ε tend vers zéro. Comme $\zeta_\varepsilon \star \varphi T$ coïncide avec $\Psi \star (\zeta_\varepsilon \star (\varphi T))$ sur $B(a, \frac{1}{2}R)$, on a alors que φT coïncide avec $\Psi \star (\varphi T)$ sur $B(a, \frac{1}{2}R)$. On en déduit que T est de classe C^∞ sur $B(a, \frac{1}{2}R)$ puisque $\varphi T = T$ sur $B(a, \frac{1}{2}R)$. Le résultat suit. $\square$

Chapitre C

Transformation de Fourier

C.1. Transformation de Fourier des fonctions sommables

Définition C.1.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de f est la fonction $\mathcal{F}f$, ou encore $\hat{f}$, définie sur $\mathbb{R}^d$ par*

$$\mathcal{F}f(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx\,.$$

Le théorème de convergence dominée et le théorème de Fubini permettent facilement de démontrer le résultat suivant.

Proposition C.1.2. *Soient f, g dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors*

a) $\mathcal{F}f$ est continue sur $\mathbb{R}^d$, $\|\mathcal{F}f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$ et $\mathcal{F}f(\xi)$ tend vers zéro à l'infini ;

b) On a $\mathcal{F}(f \star g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$.

La proposition suivante montre que la transformation de Fourier échange régularité et décroissance à l'infini.

Proposition C.1.3. *Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, soit m un entier dans $\mathbb{N}$ et soit $a \in \mathbb{R}^d$.*

a) Si $\langle x\rangle^m \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\mathcal{F}\varphi \in C^m(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $|\alpha| \leq m$

$$(i\partial)^\alpha_\xi (\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(x^\alpha \varphi)(\xi)\,. \tag{C.1}$$

b) Si $\varphi \in C^m(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $|\alpha| \leq m$, alors

$$\forall |\alpha| \leq m\,, \quad \mathcal{F}(\partial^\alpha_x \varphi)(\xi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}\varphi(\xi)\,. \tag{C.2}$$

c) La transformée de Fourier de la fonction $(\tau_a)_*\varphi := \varphi(\cdot - a)$ est donnée par

$$\mathcal{F}\big((\tau_a)_*\varphi\big)(\xi) = e^{-i\xi\cdot a}\mathcal{F}\varphi(\xi)\,.$$

d) La transformée de Fourier de la fonction $x \longmapsto e^{ia\cdot x}\varphi(x)$ est donnée par

$$\mathcal{F}(e^{ia\cdot x}\varphi)(\xi) = (\tau_a)_*\mathcal{F}\varphi(\xi)\,.$$

Démonstration. Nous ne démontrons que les deux premiers points, les autres sont laissés en exercice.

a) Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, telle que $\langle x\rangle^m \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$. L'application

$$\xi \longmapsto e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)$$

est de classe C^∞ pour presque tout x et l'on a

$$\partial_{\xi_j}\big(e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\big) = -ix_j e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)$$

et comme

$$\big|ix_j e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\big| = |x_j\varphi(x)|$$

on peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale pour en déduire que

$$\partial_{\xi_j}(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(-ix_j\varphi)(\xi)\,.$$

Par récurrence on obtient

$$\partial_\xi^\alpha(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (-i)^\alpha \mathcal{F}(x^\alpha\varphi)(\xi)\,,$$

d'où le résultat (C.1).

b) Pour démontrer (C.2) commençons par étudier le cas $m = 1$. Considérons une suite régularisante ζ_ε et posons

$$\varphi_\varepsilon := \zeta_\varepsilon \star \varphi\,.$$

Alors

$$\varphi_\varepsilon \longrightarrow \varphi \quad \text{et} \quad \partial_{x_j}\varphi_\varepsilon \longrightarrow \partial_{x_j}\varphi \quad \text{dans} \quad L^1(\mathbb{R}^d)\,.$$

Une intégration par parties (utilisant le fait que φ_ε tend vers zéro à l'infini pour tout $\varepsilon > 0$) montre que

$$\int e^{-ix_j\xi_j}\partial_{x_j}\varphi_\varepsilon(x)\,dx_j = i\xi_j\int e^{-ix_j\xi_j}\varphi_\varepsilon(x)\,dx_j$$

donc

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j}\varphi_\varepsilon)(\xi) = i\xi_j\mathcal{F}\varphi_\varepsilon(\xi)\,.$$

Comme

$$\|\mathcal{F}(\partial_{x_j}\varphi_\varepsilon) - \mathcal{F}(\partial_{x_j}\varphi)\|_{L^\infty} \leq \|\partial_{x_j}\varphi_\varepsilon - \partial_{x_j}\varphi\|_{L^1}$$

et de même pour $\mathcal{F}\varphi_\varepsilon(\xi) - \mathcal{F}\varphi(\xi)$, le résultat suit. Le cas général s'obtient de même. La proposition est démontrée. □

Lemme C.1.4. *Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive de taille d, et posons*

$$G_A(x) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d det(A)}}e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x)\cdot x}\,, \quad x \in \mathbb{R}^d\,.$$

Alors $G_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\mathcal{F}G_A(\xi) = e^{-\frac{1}{2}(A\xi)\cdot\xi}\,.$$

Démonstration. La matrice A est symétrique réelle donc on peut écrire

$$A = QDQ^t\,, \quad \text{avec} \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$$

avec Q matrice orthogonale et D matrice diagonale avec tous les λ_i réels. Par ailleurs quitte à permuter l'ordre des vecteurs propres on peut toujours supposer $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 0$, et comme $A = A^t > 0$ on a $\lambda_d > 0$. Montrons tout d'abord que G_A est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$

$$\partial^\beta G_A(x) = P_\beta(x)e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x)\cdot x}$$

où P_β est une fonction polynôme, donc

$$|\partial^\beta G_A(x)| \leq |P_\beta(x)|e^{-|x|^2/2\lambda_1}$$

ce qui donne le résultat.

La première étape consiste à se ramener au cas où $d = 1$. Dans l'intégrale définissant la transformée de Fourier de G_A on pose

$$y := Q^t x \quad \text{et} \quad \eta := Q^t\xi\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}G_A(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}G_A(x)\,dx &= \Big(\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}}\Big)\int e^{-iQ^tx\cdot Q^t\xi}e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x)\cdot x}\,dx\\ &= \Big(\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}}\Big)\int e^{-iy\cdot\eta}e^{-\frac{1}{2}(D^{-1}y)\cdot y}\,dy\\ &= \Big(\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}}\Big)\int\Big(\prod_{j=1}^{d}e^{-iy_j\eta_j}e^{-\frac{1}{2}\lambda_j^{-1}y_j^2}\Big)\,dy_1\dots dy_d\\ &= \prod_{j=1}^{d}\int\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}}e^{-iy_j\eta_j}e^{-\frac{1}{2}\lambda_j^{-1}y_j^2}\,dy_j\,.\end{aligned}$$

Puisque $\lambda_j > 0$ pour tout j, le théorème de Fubini implique ainsi qu'il suffit de faire le calcul pour $d = 1$. Soit donc $\lambda > 0$ et posons

$$g_\lambda(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}e^{-\frac{x^2}{2\lambda}}\,.$$

On aura alors

$$\mathcal{F}G_A(\xi) = \prod_{j=1}^{d}\mathcal{F}g_{\lambda_j}(\eta_j)\,,\quad \eta := Q^t\xi\,.$$

La fonction g_λ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et

$$g_\lambda'(x) = -\frac{x}{\lambda}g_\lambda(x)\,,\quad \forall x\in\mathbb{R}\,.$$

En appliquant la transformée de Fourier à chaque membre de cette égalité et en utilisant la Proposition C.1.3 il vient

$$i\eta\mathcal{F}g_\lambda(\eta) = -\frac{i}{\lambda}(\mathcal{F}g_\lambda)'(\eta)$$

et donc

$$\mathcal{F}g_\lambda(\eta) = Ce^{-\frac{1}{2}\lambda\eta^2}\,.$$

Comme de plus

$$\mathcal{F}g_\lambda(0) = C = \int g_\lambda(x)\,dx = 1$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}G_A(\xi) &= \prod_{j=1}^{d}\mathcal{F}g_{\lambda_j}(\eta_j)\\ &= \prod_{j=1}^{d}e^{-\frac{1}{2}\lambda_j\eta_j^2}\\ &= e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\lambda_j\eta_j^2}\\ &= e^{-\frac{1}{2}D\eta\cdot\eta} = e^{-\frac{1}{2}A\xi\cdot\xi}\,.\end{aligned}$$

Le lemme est démontré. □

Théorème C.1.5 (Inversion de Fourier)**.** *Soit $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathcal{F}f\in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors on a presque partout sur $\mathbb{R}^d$*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot\xi}\mathcal{F}f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)(x)\,,$$

où pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathcal{F}g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} g(\xi)\, d\xi\,.$$

Démonstration. Si nous calculons la valeur au point x de $\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\mathcal{F}f(\xi)\, d\xi$ nous trouvons

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot\xi} f(y)\, dy\Big)\, d\xi$$

mais le théorème de Fubini ne peut s'appliquer. L'idée est d'évaluer à la place l'intégrale

$$I_\varepsilon(x) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-y)\cdot\xi} e^{-\varepsilon\frac{|\xi|^2}{2}} f(y)\, dy d\xi\,,$$

de deux façons différentes.

On commence par intégrer d'abord par rapport à y, on a alors

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon\frac{|\xi|^2}{2}}\mathcal{F}f(\xi)\, d\xi$$

et par le théorème de convergence dominée de Lebesgue il vient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\mathcal{F}f(\xi)\, d\xi\,.$$

Mais en intégrant d'abord par rapport à ξ on peut utiliser le Lemme C.1.4 avec $A = \varepsilon^{-1}\mathrm{Id}$, qui implique que

$$\frac{\varepsilon^{\frac{d}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x-y)\cdot\xi} e^{-\varepsilon\frac{|\xi|^2}{2}}\, d\xi = e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}}\,.$$

On obtient alors

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\varepsilon})^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}}\, dy\,.$$

En d'autres termes

$$I_\varepsilon = g_\varepsilon \star f\,, \quad \text{avec} \quad g_\varepsilon(x) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi\varepsilon})^d} e^{-\frac{|x|^2}{2\varepsilon}}$$

et donc $I_\varepsilon(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout x et le résultat suit par unicité de la limite. $\square$

C.2. Transformation de Fourier des fonctions de la classe de Schwartz

Théorème C.2.1. *La transformation de Fourier est un isomorphisme de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *dans lui-même, d'inverse* $(2\pi)^{-d}\overline{\mathcal{F}}$ *avec les notations du Théorème* C.1.5.

Démonstration. On déduit facilement de la Proposition C.1.3 que la transformée de Fourier applique $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même. En effet on a pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(i\xi)^\alpha (i\partial_\xi)^\beta \mathcal{F}\varphi(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}\partial_x^\alpha (x^\beta\varphi(x))\, dx$$

donc

$$\begin{aligned}\sup_{|\alpha|\le m, |\beta|\le p}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\Big|\xi^\alpha\partial_\xi^\beta\mathcal{F}\varphi(\xi)\Big| &\le \sup_{|\alpha|\le m, |\beta|\le p}\Big\|\partial_x^\alpha(x^\beta\varphi)\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\le C\sup_{|\alpha|\le m, |\beta|\le p}\Big\|\langle x\rangle^{|\beta|}\partial_x^\alpha\varphi\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$

par la formule de Leibniz. On remarque que

$$\int \langle x\rangle^{|\beta|}|\partial_x^\alpha\varphi(x)|\, dx \le \int \langle x\rangle^{-d-1}\langle x\rangle^{|\beta|+d+1}|\partial_x^\alpha\varphi(x)|\, dx$$

donc puisque $x \longmapsto \langle x\rangle^{-d-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ on obtient

$$\sup_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq p} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} \left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}\varphi(\xi)\right| \leq C \sup_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq p+d+1} \left\|\langle x\rangle^{|\beta|}\partial_x^\alpha \varphi(x)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} .$$

La transformée de Fourier applique donc bien $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même et on conclut grâce au théorème d'inversion de Fourier C.1.5 puisque φ et $\mathcal{F}\varphi$ sont en particulier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. □

Théorème C.2.2 (Formule de Parseval)**.** *Soient φ, ψ et Ψ trois fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors*

a) $\displaystyle\int \mathcal{F}\varphi(\xi)\psi(\xi)\, d\xi = \int \varphi(x)\mathcal{F}\psi(x)\, dx$

b) $\displaystyle\int \varphi(x)\overline{\Psi}(x)\, dx = (2\pi)^{-d} \int \mathcal{F}\varphi(\xi)\overline{\mathcal{F}\Psi}(\xi)\, d\xi .$

Démonstration. *a*) Grâce au théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned}\int \mathcal{F}\varphi(\xi)\psi(\xi)\, d\xi &= \int \Big(\int e^{-i\xi\cdot x}\varphi(x)\, dx\Big)\psi(\xi)\, d\xi\\ &= \int \Big(\int e^{-i\xi\cdot x}\psi(\xi)\, d\xi\Big)\varphi(x)\, dx\\ &= \int \varphi(x)\mathcal{F}\psi(x)\, dx ,\end{aligned}$$

ce qui démontre *a*).

b) Soit maintenant $f := (2\pi)^{-d}\overline{\mathcal{F}\Psi}$, qui vérifie

$$\mathcal{F}f(x) = \overline{\Psi}(x) .$$

En appliquant *a*) à φ et f on trouve

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-d}\int \mathcal{F}\varphi(\xi)\overline{\mathcal{F}\Psi}(\xi)\, d\xi &= \int \mathcal{F}\varphi(\xi)f(\xi)\, d\xi\\ &= \int \varphi(x)\overline{\Psi}(x)\, dx\end{aligned}$$

et le théorème est démontré. □

C.3. Transformation de Fourier des distributions tempérées

La transformation de Fourier des distributions tempérées se définit par dualité, grâce au Théorème C.2.2.

Définition C.3.1. *Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution tempérée. La transformée de Fourier de S est la distribution $\mathcal{F}S$ définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) , \quad \langle \mathcal{F}S, \varphi\rangle := \langle S, \mathcal{F}\varphi\rangle .$$

Notons qu'au vu de la démonstration du Théorème C.2.1, la distribution $\mathcal{F}S$ ainsi définie est bien une distribution tempérée.

Remarque. On a aussi

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) , \quad \langle \overline{\mathcal{F}}S, \varphi\rangle = \langle S, \overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle .$$

Proposition C.3.2. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors la transformée de Fourier de la distribution T_f est la distribution tempérée définie par $\mathcal{F}f$: on a*

$$\mathcal{F}T_f = T_{\mathcal{F}f} .$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\langle \mathcal{F}T_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \mathcal{F}\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \Big(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(\xi)\, d\xi \Big)\, dx\,.$$

La fonction

$$(x,\xi) \longmapsto f(x)\varphi(\xi)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ donc le théorème de Fubini implique que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \Big(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} \varphi(\xi)\, d\xi \Big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi) \Big(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx \Big)\, d\xi$$

et donc

$$\langle \mathcal{F}T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi) \mathcal{F}f(\xi)\, d\xi\,,$$

d'où le résultat. □

Théorème C.3.3. *La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, d'inverse $(2\pi)^{-d}\overline{\mathcal{F}}$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le Théorème C.2.1 en notant que pour toute distribution $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}S, \varphi \rangle = \langle S, \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi \rangle = (2\pi)^d \langle S, \varphi \rangle\,,$$
$$\langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}S, \varphi \rangle = \langle S, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle = (2\pi)^d \langle S, \varphi \rangle\,.$$

Le résultat suit. □

Proposition C.3.4. *Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions tempérées convergeant vers S dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $\mathcal{F}S_n$ converge vers $\mathcal{F}S$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Il suffit d'écrire pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle \mathcal{F}S_n, \varphi \rangle = \langle S_n, \mathcal{F}\varphi \rangle \longrightarrow \langle S, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}S, \varphi \rangle\,.$$

La proposition suit. □

Proposition C.3.5. *Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution tempérée. Alors*

a) Si S est paire - resp. impaire - (au sens où $\check{S} = S$ - resp. $\check{S} = -S$) alors $\mathcal{F}S$ est paire (resp. impaire).

b) Pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$ on a

$$\mathcal{F}(\partial_k S) = i\xi_k \mathcal{F}S\,.$$

c) Pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$ on a

$$\mathcal{F}(x_k S) = i\partial_{\xi_k} \mathcal{F}S\,.$$

d) Si τ_a est la translation de vecteur a, alors en définissant $S \circ \tau_a$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\,, \quad \langle S \circ \tau_a, \varphi \rangle := \langle S, \varphi \circ \tau_{-a} \rangle$$

on a

$$\mathcal{F}(S \circ \tau_a) = e^{ia\cdot\xi} \mathcal{F}S\,.$$

e) Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\mathcal{F}(e^{ia\cdot x} S) = (\mathcal{F}S) \circ \tau_a\,.$$

f) Si h_λ est la dilatation de rapport λ définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\,, \quad \langle S \circ h_\lambda, \varphi \rangle := |\lambda|^{-d} \langle S, \varphi \circ h_{\lambda^{-1}} \rangle$$

alors

$$\mathcal{F}(S \circ h_\lambda) = |\lambda|^{-d} h_{\lambda^{-1}} \mathcal{F} S\,;$$

Démonstration. On ne va démontrer que deux points, les autres sont laissés en exercice. Soit une fonction φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

b) On a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\partial_k S), \varphi \rangle &= \langle \partial_k S, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= -\langle S, \partial_k \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= -\langle S, \mathcal{F}(-i\xi_k \varphi) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}S, i\xi_k \varphi \rangle = \langle i\xi_k \mathcal{F}S, \varphi \rangle\,. \end{aligned}$$

c) On a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(x_k S), \varphi \rangle &= \langle x_k S, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= -\langle S, x_k \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= -\langle S, \mathcal{F}(-i\partial_{\xi_k} \varphi) \rangle \\ &= -i\langle \mathcal{F}S, \partial_{\xi_k} \varphi \rangle = \langle i\partial_{\xi_k} \mathcal{F}S, \varphi \rangle\,. \end{aligned}$$

La proposition suit. □

Exemple (Transformation de Fourier de la masse de Dirac)**.** On a

$$\mathcal{F}\delta_0 = 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\,,$$

et plus généralement pour tout $a \in \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{F}\delta_a(\xi) = e^{-i\xi\cdot a}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^d\,.$$

En outre

$$(\mathcal{F}\partial^\alpha \delta_0)(\xi) = (i\xi)^\alpha\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^d\,,$$

et plus généralement pour tout $a \in \mathbb{R}^d$

$$(\mathcal{F}\partial^\alpha \delta_a)(\xi) = (i\xi)^\alpha e^{-i\xi\cdot a}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^d\,.$$

Exemple (Transformation de Fourier des polynômes)**.** On a

$$\mathcal{F}1 = (2\pi)^d \delta_0\,,$$

et

$$\mathcal{F}x^\alpha = (2\pi)^d i^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta_0\,.$$

Proposition C.3.6. *Toute distribution tempérée harmonique dans $\mathbb{R}^d$ est une fonction polynômiale.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\Delta T = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\,.$$

On sait que

$$\mathcal{F}(\Delta T) = -|\xi|^2 \mathcal{F}T = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\,,$$

donc $\mathcal{F}T$ est une distribution à support réduit à $\{0\}$. C'est donc une combinaison linéaire de la masse de Dirac et de ses dérivées, d'après le Théorème B.4.5. On a donc pour un entier m

$$\mathcal{F}T = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0\,.$$

Comme

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha \delta_0) = (i\xi)^\alpha$$

le théorème d'inversion de Fourier C.3.3 implique que

$$T = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (-i\xi)^\alpha \, .$$

Le résultat suit. □

C.4. Transformation de Fourier des fonctions de carré sommable

On note pour toutes fonctions φ et ψ de $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$(\varphi|\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)} := \int \varphi(x)\overline{\psi}(x)\, dx \, .$$

On rappelle qu'il s'agit d'un produit scalaire qui fait de $L^2(\mathbb{R}^d)$ un espace de Hilbert.

Théorème C.4.1 (Plancherel)**.** *La transformation de Fourier définie dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est un isomorphisme de l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, d'inverse $(2\pi)^{-d}\overline{\mathcal{F}}$. En outre on a*

$$(\varphi|\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d} (\mathcal{F}\varphi|\mathcal{F}\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

pour tous φ et ψ de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F}$ est une isométrie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même pour la norme L^2, c'est-à-dire que $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F}$ conserve le produit scalaire défini ci-dessus. Soient donc φ et ψ deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\int \varphi(x)\overline{\psi}(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mathcal{F}\varphi(\xi)\overline{\mathcal{F}\psi}(\xi)\, d\xi$$

par la formule de Parseval (Théorème C.2.2 b)) donc $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F}$ conserve le produit scalaire et donc la norme L^2, pour les éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Il en est de même de $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\overline{\mathcal{F}}$.

Il s'agit donc maintenant d'étendre ce résultat aux éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ contient $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, il est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Soit donc $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors par isométrie, la suite $(\mathcal{F}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et elle converge donc vers une limite g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. L'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ s'identifiant à un sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $(\mathcal{F}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{F}f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la Proposition C.3.4, et donc par unicité de la limite $\mathcal{F}f = g$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}f$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Par continuité de la norme on a de plus

$$(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \, .$$

En appliquant le même raisonnement à $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\overline{\mathcal{F}}$ on conclut que $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\overline{\mathcal{F}}$ et $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F}$ sont deux isométries de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, dont les composées à droite et à gauche sont égales à l'identité, et le théorème est démontré. □

C.5. Transformation de Fourier des distributions à support compact

On définit pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ la fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$

$$e_\xi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto e^{-ix\cdot\xi} \, . \end{array}$$

Proposition C.5.1. *Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de E est la fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ donnée par*

$$\mathcal{F}E(\xi) := \langle E, e_\xi \rangle .$$

De plus $\mathcal{F}E$ est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées, au sens où pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et une constante C tels que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\partial^\alpha \mathcal{F}E(\xi)| \leq C\langle \xi \rangle^m .$$

Démonstration. Soit la fonction

$$v(\xi) := \langle E, e_\xi \rangle .$$

En remarquant que

$$v(\xi) = \langle E, \chi e_\xi \rangle$$

avec $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ valant 1 au voisinage du support de E, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le crochet qui implique que v est de classe C^∞ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^\alpha v(\xi) &= \langle E, \chi \partial_\xi^\alpha e_\xi \rangle \\ &= \langle E, (-i\,\cdot)^\alpha \chi e_\xi \rangle .\end{aligned}$$

Montrons que v est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées. Soit K un voisinage compact du support de E et p l'ordre de E. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe une constante C telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\partial_\xi^\alpha v(\xi)| \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\beta| \leq p} \big|\partial_x^\beta (x^\alpha \chi(x) e_\xi(x))\big| \leq C\langle \xi \rangle^p .$$

Montrons enfin que $\mathcal{F}E = v$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors d'après le théorème d'intégration sous le crochet, on a

$$\begin{aligned}\langle v, \varphi \rangle &= \int v(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi \\ &= \int \langle E, e_\xi \rangle \varphi(\xi)\, d\xi \\ &= \langle E, \int e_\xi \varphi(\xi) d\xi \rangle \\ &= \langle E, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}E, \varphi \rangle\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition. □

Proposition C.5.2. *Si $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors on a dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*

$$\mathcal{F}(S \star E) = \mathcal{F}E\, \mathcal{F}S .$$

Démonstration. Nous allons commencer par traiter le cas particulier de la convolution d'une distribution E de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et d'une fonction ψ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On sait par la Proposition B.7.3 que $E \star \psi$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On écrit alors, grâce au Théorème B.4.9 d'intégration sous le crochet,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(E \star \psi)(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi} \langle E, \psi(x - \cdot) \rangle\, dx \\ &= \langle E, \int e^{-ix\cdot\xi} \psi(x - \cdot)\, dx \rangle .\end{aligned}$$

Mais

$$\int e^{-ix\cdot\xi} \psi(x - y)\, dx = \mathcal{F}\psi(\xi) e^{-iy\cdot\xi} .$$

On en déduit que
$$\begin{aligned}\mathcal{F}(E\star\psi)(\xi) &= \langle E, \mathcal{F}\psi(\xi)e_\xi\rangle\\ &= \mathcal{F}\psi(\xi)\langle E, e_\xi\rangle\\ &= \mathcal{F}\psi(\xi)\,\mathcal{F}E(\xi)\,,\end{aligned}$$
ce qui est le résultat annoncé.

Ce résultat se généralise par densité au cas où ψ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$: en effet si $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers ψ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors
$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad \mathcal{F}(E\star\psi_n) = \mathcal{F}\psi_n\,\mathcal{F}E$$
et l'on sait que $E\star\psi_n$ converge vers $E\star\psi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ grâce à (B.11). Par continuité de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a donc
$$\mathcal{F}(E\star\psi_n)\longrightarrow\mathcal{F}(E\star\psi_n)\quad\text{dans}\quad\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\,.$$
Par ailleurs il est facile de voir que
$$\mathcal{F}\psi_n\,\mathcal{F}E\longrightarrow\mathcal{F}\psi\,\mathcal{F}E\quad\text{dans}\quad\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$
donc le résultat suit.

Considérons maintenant le cas de $E\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $S\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On remarque que $E\star S$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ grâce à la Proposition B.7.5. Par ailleurs $\mathcal{F}S$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}E$ est une fonction de classe C^∞ à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées d'après la Proposition C.5.1, donc (toujours par la Proposition B.7.5), la distribution $\mathcal{F}E\,\mathcal{F}S$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Montrons maintenant que $\mathcal{F}(S\star E) = \mathcal{F}E\,\mathcal{F}S$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a
$$\big\langle\mathcal{F}(E\star S),\varphi\big\rangle = \langle S, \check{E}\star\mathcal{F}\varphi\rangle\,.$$
Mais par le calcul précédent
$$\begin{aligned}\check{E}\star\mathcal{F}\varphi &= (2\pi)^{-d}\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(\check{E}\star\mathcal{F}\varphi)\\ &= (2\pi)^{-d}\mathcal{F}\big((\overline{\mathcal{F}}\check{E})(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi)\big)\,,\end{aligned}$$
donc comme $\overline{\mathcal{F}}\check{E} = \mathcal{F}E$,
$$\check{E}\star\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\big((\mathcal{F}E)\varphi\big)\,.$$
Il vient alors
$$\begin{aligned}\big\langle\mathcal{F}(E\star S),\varphi\big\rangle &= \langle S, \mathcal{F}\big((\mathcal{F}E)\varphi\big)\rangle\\ &= \langle\mathcal{F}S\mathcal{F}E,\varphi\rangle\,.\end{aligned}$$
Le résultat est démontré. □

Théorème C.5.3. *Soit E une distribution à support compact dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ donnée par $\mathcal{F}E$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soient $\xi,\eta\in\mathbb{R}$. fonction
$$e_{\xi+i\eta}: x\longmapsto e^{-i(\xi+i\eta)x}$$
est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc on peut définir la fonction sur $\mathbb{R}^2$
$$\forall(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2\,,\quad F(\xi,\eta) := \langle E, e_{\xi+i\eta}\rangle\,.$$
On montre comme ci-dessus que $F\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. On a en particulier
$$\partial_\xi F(\xi,\eta) = \langle E, -ixe_{\xi+i\eta}\rangle\quad\text{et}\quad\partial_\eta F(\xi,\eta) = \langle E, xe_{\xi+i\eta}\rangle\,.$$
La fonction F vérifie donc les équations de Cauchy-Riemann
$$\forall(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2\,,(\partial_\xi+i\partial_\eta)F = 0$$

et donc la fonction
$$(\xi + i\eta) \in \mathbb{C} \longmapsto F(\xi, \eta)$$
est holomorphe. Comme par ailleurs
$$\mathcal{F}E(\xi) = \langle E, e_\xi \rangle = F(\xi, 0)$$
le résultat suit. □

C.6. Transformation de Fourier et séries de Fourier

On se place ici en dimension 1 pour simplifier l'exposition. On remarque que toute fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et donc définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$. C'est l'un des avantages du cadre des distributions tempérées pour étudier la transformation de Fourier, contrairement à $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème C.6.1 (Formule sommatoire de Poisson)**.** *La distribution*
$$T := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$$
appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier est
$$\mathcal{F}T = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi} \, .$$

Démonstration. On note que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la somme $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)$ est finie donc T est une distribution tempérée (voir les exemples page 59). Calculons sa transformée de Fourier. On a
$$T = T \circ \tau_1$$
donc
$$\mathcal{F}T(\xi) = \mathcal{F}(T \circ \tau_1)(\xi) = e^{i\xi} \mathcal{F}T(\xi)$$
ce qui implique que le support de $\mathcal{F}T$ est inclus dans $2\pi\mathbb{Z}$. Soit maintenant χ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée dans $]-\pi/4, \pi/4[$ et égale à 1 sur $]-\pi/8, \pi/8[$. On a alors
$$\mathcal{F}T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi(\cdot - 2\pi k)\mathcal{F}T \, .$$
Par ailleurs on peut écrire
$$0 = (e^{i\xi} - 1)\chi(\xi - 2\pi k)\mathcal{F}T = (\xi - 2\pi k)\frac{e^{i\xi} - 1}{\xi - 2\pi k}\chi(\xi - 2\pi k)\mathcal{F}T \, .$$
Mais on peut montrer (exercice !) que si une distribution S vérifie $(x-a)S = 0$ alors il existe une constante C_0 telle que $S = C_0\delta_a$. Il existe donc une constante C_k telle que
$$\frac{e^{i\xi} - 1}{\xi - 2\pi k}\chi(\xi - 2\pi k)\mathcal{F}T = C_k \delta_{2\pi k} \, .$$
Comme $\dfrac{e^{i\xi} - 1}{\xi - 2\pi k} \to i$ quand $\xi \to 2\pi k$ on a
$$\chi(\xi - 2\pi k)\mathcal{F}T = -iC_k \delta_{2\pi k} \, ,$$
et donc
$$\mathcal{F}T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} -iC_k \delta_{2\pi k} \, .$$
Il reste à calculer les coefficients C_k. On a
$$e^{i2\pi x} T = T \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

donc
$$\mathcal{F}T \circ \tau_{2\pi} = \mathcal{F}T\,.$$
On en conclut qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que
$$-iC_k = c \quad \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$
Il s'agit donc maintenant de calculer c. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} c\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(2\pi k + y) &= \langle \mathcal{F}T, \varphi(\cdot + y)\rangle \\ &= \big\langle T, \mathcal{F}(\varphi(\cdot + y))\big\rangle \\ &= \langle T, e_{-y}\mathcal{F}\varphi\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\varphi(k)e^{iky}\,. \end{aligned}$$
Après intégration sur $[0, 2\pi]$ il vient (en appliquant le théorème de convergence dominée pour justifier l'interversion de l'intégrale et de la série)
$$\begin{aligned} c\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx &= c\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \varphi(x)\,dx \\ &= c\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \varphi(2\pi k + y)\,dy \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\varphi(k) \int_0^{2\pi} e^{iky}\,dy \\ &= 2\pi\mathcal{F}\varphi(0) \\ &= 2\pi\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx \end{aligned}$$
donc $c = 2\pi$. Le théorème est démontré. □

Définition C.6.2. *Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est dite périodique de période a si*
$$T \circ \tau_a = T\,.$$

Proposition C.6.3. *Toute distribution périodique sur $\mathbb{R}$ est tempérée.*

Démonstration. Soit ψ une fonction positive, à support dans $]-2, 2[$ et égale à 1 sur $[-1, 1]$. Alors
$$\Psi(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(x + k)$$
est une fonction bien définie (car la somme ne fait intervenir qu'un nombre fini de termes) et on a $\Psi(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par ailleurs Ψ est 1-périodique, et la fonction
$$\phi(x) := \frac{\psi(x)}{\Psi(x)}$$
est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et vérifie
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(x + k) = 1\,.$$
Soit maintenant T une distribution 1-périodique, on a
$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(\cdot + k)T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\phi T) \circ \tau_k$$

puisque $T \circ \tau_k = T$ pour tout entier k. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle (\phi T) \circ \tau_k, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi T, \varphi(\cdot - k) \rangle \,.$$

Mais comme $\phi T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, il existe un entier m et une constante $C > 0$ tels que dès que $|k| \geq 3$ alors

$$\begin{aligned} |\langle \phi T, \varphi(\cdot - k) \rangle| &\leq C \max_{\alpha \leq m} \sup_{|x| \leq 2} |\varphi^{(\alpha)}(x - k)| \\ &\leq \frac{C}{(|k| - 2)^2} p_{2,m}(\varphi) \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. □

La proposition suivante fait montre comment la théorie des séries de Fourier des fonctions continues périodiques s'inscrit dans le cadre de la théorie de la transformée de Fourier des distributions tempérées.

Proposition C.6.4. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution 1-périodique. La transformée de Fourier de T est donnée par la série convergente dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$*

$$\mathcal{F}T = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{2\pi k} \quad \text{avec} \quad c_k = \mathcal{F}(\phi T)(2\pi k) \,,$$

où $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est n'importe quelle fonction vérifiant

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x + k) = 1 \,.$$

On remarque que si f est une fonction continue 1-périodique, alors

$$\begin{aligned} c_k &= \int (\phi T)(x) e^{-2i\pi kx} \, dx \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_\ell^{\ell+1} (\phi T)(x) e^{-2i\pi kx} \, dx \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \phi(x + \ell) T(x) e^{-2i\pi kx} \, dx \\ &= \int_0^1 T(x) e^{-2i\pi kx} \, dx \end{aligned}$$

ce qui correspond bien au $k$ième coefficient de Fourier de f. Passons maintenant à la démonstration de la proposition.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle &= \langle \big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(\cdot + k) \big) T, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\phi T) \circ \tau_k, \mathcal{F}\varphi \rangle \end{aligned}$$

car $T \circ \tau_k = T$, et donc

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle &= \langle \phi T, \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}\varphi)(\cdot - k) \rangle \\ &= \langle \phi T, \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}\varphi)(\cdot + k) \rangle \,. \end{aligned}$$

Mais d'après la formule sommatoire de Poisson on a (en rappelant que $e_x(\xi) := e^{-ix\cdot\xi}$),

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\mathcal{F}\varphi)(x+k) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(\varphi e_x)(k)\\
&= \Big\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k, \mathcal{F}(\varphi e_x)\Big\rangle\\
&= \Big\langle \mathcal{F}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k\Big), \varphi e_x\Big\rangle\\
&= 2\pi\Big\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi k}, \varphi e_x\Big\rangle\\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(2\pi k)e^{-2i\pi kx}\,.
\end{aligned}
$$

Il vient donc

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle &= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle \phi T, e_{2\pi k}\rangle\varphi(2\pi k)\\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(\phi T)(2\pi k)\varphi(2\pi k)\\
&= \Big\langle 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(\phi T)(2\pi k)\delta_{2\pi k}, \varphi\Big\rangle\,,
\end{aligned}
$$

ce qui conclut la démonstation. □

C.7. Espaces de Sobolev

C.7.1. Espaces de Sobolev sur $\mathbb{R}^d$.

Définition C.7.1 (Espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$)**.** *Soit s un nombre réel. L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des distributions tempérées f telles que*

$$\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^d; \langle\xi\rangle^{2s}\,d\xi)\,.$$

On pose alors

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d}\langle\xi\rangle^{2s}|\mathcal{F}f(\xi)|^2\,d\xi\,.$$

L'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des distributions tempérées f telles que $\mathcal{F}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^d; |\xi|^{2s}\,d\xi)\,.$$

On pose

$$\|f\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2s}|\mathcal{F}f(\xi)|^2\,d\xi < +\infty\,.$$

Proposition C.7.2. *Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ sont des espaces de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(f\,|\,g)_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d}\langle\xi\rangle^{2s}\mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}\,d\xi\,.$$

Les espaces de Sobolev homogènes $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ sont des espaces des Hilbert pour le produit scalaire

$$(f\,|\,g)_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2s}\mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}\,d\xi$$

si et seulement si $s < d/2$.

Démonstration. Le cas des espaces inhomogènes $H^s(\mathbb{R}^d)$ se traite en remarquant que la transformée de Fourier est un isomorphisme isométrique entre $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d;\langle\xi\rangle^{2s}\,d\xi)$.

Dans le cas des espaces homogènes commençons par supposer que $s<d/2$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d;|\xi|^{2s}\,d\xi)$ donc il existe une fonction $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^d;|\xi|^{2s}\,d\xi)$ telle que la suite $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $L^2(\mathbb{R}^d;|\xi|^{2s}\,d\xi)$. Montrons que φ est une distribution tempérée, que $f:=\mathcal{F}^{-1}\varphi$ appartient à $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$ et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$. Puisque $s<d/2$ on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_{B(0,1)}|\varphi(\xi)|\,d\xi\le\Big(\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2s}|\varphi(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{\frac12}\Big(\int_{B(0,1)}|\xi|^{-2s}\,d\xi\Big)^{\frac12}<\infty\,.$$

On en déduit que $\mathbf{1}_{B(0,1)}\varphi$ appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$. Comme $\mathbf{1}_{^cB(0,1)}\varphi$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d;\langle\xi\rangle^{2s}\,d\xi)$ on obtient que φ est une distribution tempérée. Soit $f:=\mathcal{F}^{-1}\varphi$, alors f appartient à $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$ et on a bien que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$ puisque $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $L^2(\mathbb{R}^d;|\xi|^{2s}\,d\xi)$. Donc $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$ est complet si $s<d/2$.

Dans le cas où $s\ge d/2$ on considère la fonction sur $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$

$$\phi: f\longmapsto\|\widehat f\|_{L^1(B(0,1))}+\|f\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)}\,.$$

On constate facilement que ϕ est une norme sur $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$ et que $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach pour cette norme. En considérant l'application identité

$$(\dot H^s(\mathbb{R}^d),\phi)\longrightarrow\Big(\dot H^s(\mathbb{R}^d),\|\cdot\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)}\Big)$$

qui est linéaire, continue et surjective on constate que si l'espace $\big(\dot H^s(\mathbb{R}^d),\|\cdot\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)}\big)$ était complet, alors il existerait par le théorème de l'application ouverte une constante C telle que

$$\forall f\in\dot H^s(\mathbb{R}^d)\,,\quad \phi(f)\le C\|f\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)}\,,$$

ce qui impliquerait que

$$\exists C>0\,,\quad\forall f\in\dot H^s(\mathbb{R}^d)\,,\quad\|\widehat f\|_{L^1(B(0,1))}\le C\|f\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Nous allons montrer que cette inégalité est fausse grâce à l'exemple suivant : soit $\mathcal{C}$ une couronne de $\mathbb{R}^d$ centrée en 0, incluse dans la boule unité $B(0,1)$, telle que $\mathcal{C}\cap2\mathcal{C}=\emptyset$ et soit la suite

$$f_n:=\mathcal{F}^{-1}\Big(\sum_{q=1}^n\frac{2^{q(s+\frac d2)}}{q}\mathbf{1}_{2^{-q}\mathcal{C}}\Big)\,.$$

Alors l'hypothèse $\mathcal{C}\cap2\mathcal{C}=\emptyset$ permet d'écrire que

$$\|\widehat{f_n}\|_{L^1(B(0,1))}=C_1\sum_{q=1}^n\frac{2^{q(s-\frac d2)}}{q}\,,\quad C_1:=|\mathcal{C}|$$

et

$$\|f_n\|^2_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)}\le C_s\sum_{q=1}^n\frac{1}{q^2}\le C'\,,\quad C_s:=\int_{\mathcal{C}}|\eta|^{2s}\,d\eta\,,$$

et comme $s\ge d/2$ on en déduit que $\|\widehat{f_n}\|_{L^1(B(0,1))}$ tend vers l'infini avec n alors que $\|f_n\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)}$ est bornée. La proposition suit. □

Exercice. Soient r,s et t trois réels.

a) Si $s < t$ alors $H^t(\mathbb{R}^d) \subset H^s(\mathbb{R}^d)$ et cette inclusion définit une application linéaire continue : on a
$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{H^t(\mathbb{R}^d)}\,, \quad \forall f \in H^t(\mathbb{R}^d)\,.$$
b) Si $r < s < t$ alors $\dot{H}^r \cap \dot{H}^t(\mathbb{R}^d) \subset \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et on a
$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|^{1-\theta}_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^d)} \|f\|^{\theta}_{\dot{H}^t(\mathbb{R}^d)}\,, \quad \forall f \in \dot{H}^r \cap \dot{H}^t(\mathbb{R}^d)\,,$$
avec $s = (1-\theta)r + \theta t$.

c) L'application linéaire
$$f \in H^{-s}(\mathbb{R}^d) \longmapsto L_f \in \big(H^s(\mathbb{R}^d)\big)^*\,,$$
où L_f est la forme (anti)-linéaire définie par
$$L_f(\varphi) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}\varphi(\xi)}\, d\xi\,,$$
est un isomorphisme linéaire isométrique entre l'espace $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et le dual topologique $\big(H^s(\mathbb{R}^d)\big)^*$ de $H^s(\mathbb{R}^d)$.

d) Si $|s| < d/2$, l'application linéaire
$$f \in \dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^d) \longmapsto L_f \in \big(\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)\big)^*$$
où L_f est la forme (anti)-linéaire définie par
$$L_f(\varphi) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}\varphi(\xi)}\, d\xi$$
est un isomorphisme linéaire isométrique entre l'espace $\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et le dual topologique $\big(\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)\big)^*$ de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$.

Proposition C.7.3. *Pour tout entier k, l'espace $H^k(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont toutes les dérivées au sens des distributions jusqu'à l'ordre k sont dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et l'on a*
$$\|f\|^2_{H^k(\mathbb{R}^d)} \sim \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Démonstration. On rappelle que $\partial^\alpha f$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $\xi^\alpha \mathcal{F}f$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme pour tout entier k il existe une constante C telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$
$$C^{-1}\Big(1 + \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2\Big) \leq \langle\xi\rangle^{2k} \leq C\Big(1 + \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2\Big)\,,$$
la proposition suit. □

Proposition C.7.4. *Soit k un entier et $\sigma \in]0,1[$ un réel. Posons $s = \sigma + k$, alors*
$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} \sim \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{\big|\partial^\alpha f(x+y) - \partial^\alpha f(x)\big|^2}{|y|^{d+2\sigma}}\, dxdy\,.$$

Ce résultat est une conséquence directe de la proposition suivante.

Proposition C.7.5. *Soit $s \in]0,1[$ un réel. Alors l'espace $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et il existe une constante C telle que*
$$\forall f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)\,, \quad \|f\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = C \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{\big|f(x+y) - f(x)\big|^2}{|y|^{d+2s}}\, dxdy\,. \tag{C.3}$$

Démonstration. Le fait que f appartienne à $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est simplement une conséquence du fait que
$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,1)}\mathcal{F}f) + \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{^cB(0,1)}\mathcal{F}f)\,.$$
En effet $\mathbf{1}_{B(0,1)}\mathcal{F}f$ est une distribution à support compact donc $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,1)}\mathcal{F}f)$ est de classe C^∞ et donc dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs comme $s \geq 0$ on a que $\mathbf{1}_{^cB(0,1)}\mathcal{F}f$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$ et donc $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{^cB(0,1)}\mathcal{F}f)$ aussi. Montrons l'égalité (C.3). On a par le Théorème de Plancherel C.4.1
$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x+y) - f(x)\big|^2\, dx = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \big|e^{iy\cdot\xi} - 1\big|^2 \big|\mathcal{F}f(\xi)\big|^2\, d\xi$$
donc
$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{\big|f(x+y) - f(x)\big|^2}{|y|^{d+2s}}\, dxdy = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} L(\xi)\big|\mathcal{F}f(\xi)\big|^2\, d\xi$$
$$\text{avec}\quad L(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\big|e^{iy\cdot\xi} - 1\big|^2}{|y|^{d+2s}}\, dy\,.$$
Comme la fonction L est radiale et homogène de degré $2s$ elle est proportionnelle à $|\xi|^{2s}$, et la proposition suit. □

Corollaire C.7.6. *Soit $0 \leq s < k$ avec k entier, et soit φ un C^k difféomorphisme global sur $\mathbb{R}^d$. Si $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors $f \circ \varphi \in H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser la formulation fournie par la Proposition C.7.4 et d'effectuer un changement de variable. □

Proposition C.7.7. *Pour tout réel s, l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace dense de $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Pour tout réel $s < \dfrac{d}{2}$, l'espace $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dont la transformée de Fourier est identiquement nulle près de l'origine est un sous-espace dense de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. L'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ étant un espace de Hilbert, il suffit de vérifier que l'orthogonal de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour le produit scalaire de $H^s(\mathbb{R}^d)$ est réduit à $\{0\}$. Supposons donc qu'il existe une distribution f dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ telle que pour toute fonction φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on ait
$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{2s}\mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}\varphi}(\xi) = 0\,.$$
Alors l'application $\xi \longmapsto \langle\xi\rangle^{2s}\mathcal{F}f(\xi)$ est identiquement nulle dans $\mathbb{S}'(\mathbb{R}^d)$, donc $\mathcal{F}f \equiv 0$ et donc $f \equiv 0$.

De même supposons qu'il existe une distribution f dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ telle que pour toute fonction φ de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ on ait
$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s}\mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}\varphi(\xi)}\, d\xi = 0\,.$$
Alors $\mathcal{F}f$ s'annule sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et donc $\mathcal{F}f \equiv 0$. Le résultat suit puisque $s < d/2$ et donc $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert. □

Proposition C.7.8. *La multiplication par une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une application continue de $H^s(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même pour tout réel s.*

Démonstration. On sait que
$$\mathcal{F}(\varphi f) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}\varphi \star \mathcal{F}f$$

donc la démonstration de la proposition se réduit à l'estimation de la norme $L^2(\mathbb{R}^d)$ de la fonction

$$u(\xi) := \langle\xi\rangle^s \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}\varphi(\xi-\eta)||\mathcal{F}f(\eta)|\,d\eta\,.$$

Vérifions tout d'abord que pour tout réel s, il existe une constante C telle que

$$\langle\xi\rangle^s \leq C\langle\xi-\eta\rangle^{|s|}\langle\eta\rangle^s\,.$$

En effet quitte à échanger ξ et η on peut supposer que $s \geq 0$ et l'on a

$$\begin{aligned}\langle\xi\rangle^s &\leq C(1+|\xi-\eta|^2+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\\ &\leq C'\langle\xi-\eta\rangle^s\langle\eta\rangle^s\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$|u(\xi)| \leq C' \int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi-\eta\rangle^{|s|}|\mathcal{F}\varphi(\xi-\eta)|\langle\eta\rangle^s|\mathcal{F}f(\eta)|\,d\eta$$

et l'inégalité de Young

$$\|g\star h\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^1}\|h\|_{L^2} \tag{C.4}$$

permet de conclure que

$$\|\varphi f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq 2^{\frac{|s|}{2}}\left\|\langle\xi\rangle^{|s|}\mathcal{F}\varphi\right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\,.$$

L'inégalité (C.4) s'obtient en remarquant que pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, par les théorèmes de Fubini et Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\int g\star h(x)\,f(x)\,dx &= \iint g(y)h(x-y)f(x)\,dxdy\\ &\leq \int |g(y)| \int |h(x-y)|\,|f(x)|\,dxdy\\ &\leq \|f\|_{L^2}\|h\|_{L^2}\int |g(y)|\,dy = \|f\|_{L^2}\|h\|_{L^2}\|g\|_{L^1}\,.\end{aligned}$$

La proposition est démontrée. □

C.7.2. Injections de Sobolev.

Théorème C.7.9 (Injections de Sobolev - le cas C^k)**.** *Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier. Pour tout réel $s > \frac{d}{2}+k$ on a*

$$H^s(\mathbb{R}^d) \subset C^k(\mathbb{R}^d)\,.$$

Plus précisément toute fonction $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ est égale presque partout à une fonction de $C^k(\mathbb{R}^d)$, et il existe une constante C ne dépendant que de d, k et s telle que pour toute fonction $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\max_{|\alpha|\leq k}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\partial^\alpha f(x)| \leq C\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Démonstration. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$. Comme $s > \frac{d}{2}+k$, la fonction

$$\xi \longmapsto \frac{(i\xi)^\alpha}{\langle\xi\rangle^s}$$

appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (i\xi)^\alpha\mathcal{F}f = \frac{(i\xi)^\alpha}{\langle\xi\rangle^s}\langle\xi\rangle^s\mathcal{F}f$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$. On en déduit que la distribution tempérée $\partial^\alpha f$ s'identifie en fait à une fonction continue et

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi)\, d\xi$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. On a alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha f(x)| \leq C\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$

avec

$$C := \frac{1}{(2\pi)^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{2(k-s)}\, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Le théorème est démontré. □

Théorème C.7.10 (Injections de Sobolev - le cas L^p)**.** *Si $s \in]0, d/2[$ alors les espaces $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ sont continûment inclus dans $L^{\frac{2d}{d-2s}}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Tout d'abord notons que si $s > 0$ alors $H^s(\mathbb{R}^d)$ est continûment inclus dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ donc il suffit de montrer le résultat pour $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. On remarque ensuite qu'un argument d'échelle permet de trouver l'exposant $p = 2d/(d-2s)$. Soit en effet f une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et posons f_ℓ la fonction $f_\ell(x) := f(\ell x)$ (avec $\ell > 0$). Pour tout $p \in [1, \infty[$ on a

$$\begin{aligned}
\|f_\ell\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \ell^{-\frac{d}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \text{et} \\
\|f_\ell\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\mathcal{F} f_\ell(\xi)|^2\, d\xi \\
&= \ell^{-2d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\mathcal{F} f(\ell^{-1}\xi)|^2\, d\xi \\
&= \ell^{-d+2s} \|f\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Si l'inégalité $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}$ est vraie pour toute fonction régulière f, elle est vraie aussi pour f_ℓ pour tout $\ell > 0$.Cela conduit à la relation $p = 2d/(d-2s)$.

Démontrons à présent le théorème. On va supposer que f est une fonction de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ (le résultat suivra par densité) et pour simplifier les calculs on suppose sans perte de généralité que $\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = 1$.

Commençons par observer que pour tout $p \in [1, +\infty[$, grâce au théorème de Fubini on a pour toute fonction mesurable f,

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \\
&= p \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{|f(x)|} \Lambda^{p-1} d\Lambda dx \\
&= p \int_0^\infty \Lambda^{p-1} \mu \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^d / \, |f(x)| > \Lambda \right\} \right) d\Lambda,
\end{aligned}$$

où μ est la mesure de Lebesgue. Nous allons décomposer f en basses et hautes fréquences (pour chaque Λ) en écrivant $f = f_\flat + f_\sharp$, avec

$$f_\flat := \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,A)} \mathcal{F} f) \quad \text{et} \quad f_\sharp := \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{{}^cB(0,A)} \mathcal{F} f), \tag{C.5}$$

où la constante $A > 0$ dépend de Λ et sera déterminée plus tard. Comme le support de la transformée de Fourier de $f_\flat$ est compact, la fonction $f_\flat$ est bornée. On a plus précisément en appliquant la transformée de Fourier inverse et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|f_\flat\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\leq (2\pi)^{-d}\|\mathcal{F}f_\flat\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\leq (2\pi)^{-d}\int_{B(0,A)}|\xi|^{-s}|\xi|^s|\mathcal{F}f(\xi)|d\xi\\ &\leq (2\pi)^{-d}\biggl(\int_{B(0,A)}\frac{d\xi}{|\xi|^{2s}}\biggr)^{\frac12}\|f\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)}\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$\|f_\flat\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C_s A^{\frac d2-s}\,. \tag{C.6}$$

Par l'inégalité triangulaire on a

$$\bigl\{x\in\mathbb{R}^d/\,|f(x)|>\Lambda\bigr\}\subset\bigl\{x\in\mathbb{R}^d/\,2|f_\flat(x)|>\Lambda\bigr\}\cup\bigl\{x\in\mathbb{R}^d/\,2|f_\sharp(x)|>\Lambda\bigr\}\,.$$

Grâce à (C.6) on a

$$A=A_\Lambda:=\Bigl(\frac{\Lambda}{4C_s}\Bigr)^{\frac pd}\Longrightarrow \mu\Bigl(\bigl\{x\in\mathbb{R}^d/\,|f_\flat(x)|>\Lambda/2\bigr\}\Bigr)=0\,.$$

On en déduit avec ce choix de $A=A_\Lambda$ que

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)}\leq p\int_0^\infty \Lambda^{p-1}\mu\Bigl(\bigl\{x\in\mathbb{R}^d/\,|f_\sharp(x)|>\Lambda/2\bigr\}\Bigr)\,d\Lambda\,.$$

Il est bien connu (c'est l'inégalité de Bienaimé–Tchebychev) que

$$\begin{aligned}\mu\Bigl(\bigl\{x\in\mathbb{R}^d/\,|f_\sharp(x)|>\Lambda/2\bigr\}\Bigr) &= \int_{\{x\in\mathbb{R}^d/\,|f_\sharp(x)|>\Lambda/2\}}dx\\ &\leq \int_{\{x\in\mathbb{R}^d/\,|f_\sharp(x)|>\Lambda/2\}}\frac{4|f_\sharp(x)|^2}{\Lambda^2}\,dx\\ &\leq \frac{4}{\Lambda^2}\|f_\sharp\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)}\leq 4p\int_0^\infty \Lambda^{p-3}\|f_\sharp\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,d\Lambda\,,$$

et donc

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)}\leq 4p(2\pi)^{-d}\int_0^\infty\Lambda^{p-3}\int_{|\xi|\geq A_\Lambda}|\mathcal{F}f(\xi)|^2\,d\xi d\Lambda\,. \tag{C.7}$$

Par définition de A_Λ on a

$$|\xi|\geq A_\Lambda\Longleftrightarrow \Lambda\leq 4C_s|\xi|^{\frac dp}\,.$$

Alors le théorème de Fubini implique que

$$\begin{aligned}\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} &\leq 4p(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\biggl(\int_0^{4C_s|\xi|^{\frac dp}}\Lambda^{p-3}d\Lambda\biggr)|\mathcal{F}f(\xi)|^2d\xi\\ &\leq \frac{4p}{p-2}(2\pi)^{-d}\,(4C_s)^{p-2}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{\frac{d(p-2)}{p}}|\mathcal{F}f(\xi)|^2d\xi\,.\end{aligned}$$

Comme $2s=\dfrac{d(p-2)}{p}$ le théorème est démontré, par densité de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ dans $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Par dualité on peut démontrer le corollaire suivant.

Corollaire C.7.11. *Si p appartient à $]1,2]$, alors*

$$L^p(\mathbb{R}^d)\subset\dot H^s(\mathbb{R}^d)\quad\textit{avec}\quad s=-d\Bigl(\frac1p-\frac12\Bigr)\cdot$$

Démonstration. Notons que puisque p appartient à $]1,2]$, alors $-d/2 < s \leq 0$. Écrivons

$$\|a\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\|\varphi\|_{\dot H^{-s}(\mathbb{R}^d)}\leq 1} \langle a,\varphi\rangle.$$

Comme $-s = d\Big(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}\Big) = d\Big(\dfrac{1}{2}-\Big(1-\dfrac{1}{p}\Big)\Big)$, on a $\|\varphi\|_{\dot H^{-s}(\mathbb{R}^d)} \geq C\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}$, et donc

$$\begin{aligned}\|a\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)} &\leq C \sup_{\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}\leq 1} \langle a,\varphi\rangle\\ &\leq C\|a\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,.\end{aligned}$$

Cela conclut la démonstration. □

C.7.3. Trace et relèvement.

Théorème C.7.12 (Théorème de trace et relèvement)**.** *Soit $d\geq 2$ et $s>1/2$. L'application linéaire (dite de trace)*

$$\begin{aligned}\gamma:\quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})\\ f &\longmapsto \gamma(f)\end{aligned}$$

avec

$$\gamma(f)(x_1,\dots,x_{d-1}) := f(x_1,\dots,x_{d-1},0)$$

se prolonge en une application linéaire continue surjective

$$\gamma : H^s(\mathbb{R}^d) \longrightarrow H^{s-\frac12}(\mathbb{R}^{d-1})\,,$$

et il existe une application linéaire continue (dite de relèvement)

$$R : H^{s-\frac12}(\mathbb{R}^{d-1}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^d)$$

telle que $\gamma\circ R = Id_{H^{s-\frac12}(\mathbb{R}^{d-1})}$.

Démonstration. Notons $x' := (x_1,\dots,x_{d-1})$. On a pour toute fonction $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\|\gamma(f)\|_{H^{s-\frac12}(\mathbb{R}^{d-1})} = \Big\|\langle\xi'\rangle^{s-\frac12}\mathcal{F}(\gamma(f))\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}$$

et

$$\mathcal{F}(\gamma(f))(\xi') = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi)\,d\xi_d\,.$$

En effet

$$\begin{aligned}f(x',0) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{ix'\cdot\xi'}\mathcal{F}f(\xi)\,d\xi\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d-1}}\int e^{ix'\cdot\xi'}\Big(\frac{1}{2\pi}\int \mathcal{F}f(\xi',\xi_d)\,d\xi_d\Big)\,d\xi'\end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{F}(\gamma(f))(\xi') = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi)\,d\xi_d\,.$$

Mais par Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}f(\xi)\,d\xi_d\Big|^2 &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s}|\mathcal{F}f(\xi)|^2\,d\xi_d\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi_d}{\langle\xi\rangle^{2s}}\Big)\\ &\leq C\Big(\int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s}|\mathcal{F}f(\xi)|^2\,d\xi_d\Big)\langle\xi'\rangle^{1-2s}\end{aligned}$$

avec

$$C := \int_{\mathbb{R}}\frac{d\zeta}{\langle\zeta\rangle^{2s}}$$

et donc puisque $s > 1/2$ il vient

$$\|\gamma(f)\|^2_{H^{s-\frac12}(\mathbb{R}^d)} \leq C'\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}\,.$$

On conclut par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ que l'opérateur de trace γ peut bien être défini sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ et que son image est dans $H^{s-\frac12}(\mathbb{R}^{d-1})$. Pour montrer que γ est surjective définissons un opérateur de relèvement

$$R : H^{s-\frac12}(\mathbb{R}^{d-1}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^d) \quad \text{tel que} \quad \gamma \circ R = \mathrm{Id}\,.$$

Pour cela on considère une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi(0) = 1$ et l'on pose, pour g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$,

$$\begin{aligned} Rg(x) &:= \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{ix'\cdot\xi'} \chi(x_d\langle\xi'\rangle)\mathcal{F}g(\xi')\,d\xi' \\ &= \mathcal{F}^{-1}_{\xi'\to x'}\big(\chi(x_d\langle\xi'\rangle)\mathcal{F}g(\xi')\big)\,. \end{aligned}$$

On a clairement $\gamma \circ Rg = g$ et

$$\mathcal{F}(Rg)(\xi) = \frac{1}{\langle\xi'\rangle}(\mathcal{F}_{x_d\to\xi_d}\chi)\Big(\frac{\xi_d}{\langle\xi'\rangle}\Big)\mathcal{F}g(\xi')\,,$$

donc

$$\|Rg\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{2s}\langle\xi'\rangle^{-2}\big|(\mathcal{F}_{x_d\to\xi_d}\chi)(\langle\xi'\rangle^{-1}\xi_d)\big|^2|\mathcal{F}g(\xi')|^2\,d\xi\,.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \|Rg\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} &\leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \langle\xi'\rangle^{-2s-1}\langle\xi\rangle^{2s}(\mathcal{F}_{x_d\to\xi_d}\chi(\langle\xi'\rangle^{-1}\xi_d)\,d\xi_d\Big)\langle\xi'\rangle^{2s-1}|\mathcal{F}g(\xi')|^2\,d\xi' \\ &\leq C\|g\|^2_{H^{s-\frac12}(\mathbb{R}^{d-1})} \end{aligned}$$

avec

$$C := \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}\chi(\zeta)|^2\langle\zeta\rangle^{2s}\,d\zeta\,.$$

Le théorème est démontré. □

Remarque. On peut définir plus généralement un opérateur de trace pour toute hypersurface régulière Σ de $\mathbb{R}^d$ en utilisant la stabilité de $H^s(\mathbb{R}^d)$ par composition par des difféomorphismes (Corollaire C.7.6) ansi que la Proposition C.7.8 qui permettent de localiser et redresser le bord.

C.7.4. Espaces de Sobolev sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Définition C.7.13 (Espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, k un entier, et p un réel dans $[1,\infty]$. L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{k,p}(\Omega) := \Big\{f \in L^p(\Omega)\,/\,\partial^\alpha f \in L^p(\Omega)\,,\forall\,|\alpha| \leq k\Big\}\,.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

On montre facilement que $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, réflexif si $1 < p < \infty$ et séparable si $1 \leq p < \infty$. L'espace de Sobolev $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable, muni du produit scalaire

$$(f|g)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} (\partial^\alpha f|\partial^\alpha g)_{L^2(\Omega)}\,.$$

L'espace suivant est particulièrement utile.

Définition C.7.14. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace $H^1_0(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $H^1(\Omega)$. L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace $H^1_0(\Omega)$ au sens où*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{\varphi \in H^1_0(\Omega)\,,\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq 1} \langle f, \varphi \rangle \,.$$

Proposition C.7.15 (Inégalité de Poincaré)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante C telle que pour toute fonction f de $H^1_0(\Omega)$ on ait*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} \,.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. On écrit tout élément $x \in \Omega$ sous la forme $x = (x', x_d)$ avec $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ et l'on a

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x_d} \partial_{y_d} f(x', y_d) \, dy_d$$

donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient (parce que Ω est borné)

$$|f(x)|^2 \leq C \int |\nabla f(x', y_d)|^2 \, dy_d$$

et le résultat suit par intégration, et par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$. □

Proposition C.7.16 (Inégalités de Gagliardo–Nirenberg)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et soit $p \in [2, \infty[$ tel que $1/p > 1/2 - 1/d$. Il existe une constante C telle que pour toute fonction f dans $H^1_0(\Omega)$,*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|^{1-\sigma}_{L^2(\Omega)} \|\nabla f\|^{\sigma}_{L^2(\Omega)} \quad \textit{avec} \quad \sigma = \frac{d(p-2)}{2p} \cdot \tag{C.8}$$

Démonstration. Par densité on peut supposer que f appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors les injections de Sobolev (Théorème C.7.10) impliquent que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{\dot H^{\frac{d(p-2)}{2p}}(\mathbb{R}^d)} \cdot$$

Par convexité des normes de Sobolev

$$\|f\|_{\dot H^{\sigma}(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|^{1-\sigma}_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|f\|^{\sigma}_{\dot H^1(\mathbb{R}^d)} \quad \text{pour tout} \quad \sigma \in [0,1] \,,$$

on obtient le résultat. □

Les deux théorèmes suivants sont admis.

Théorème C.7.17. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, à bord de classe C^m avec $m \geq 1$ un entier. Alors il existe un opérateur linéaire P de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ pour tout p dans $[1, \infty]$, tel que si $f \in W^{m,p}(\Omega)$ alors*

a) $Pf_{|\Omega} = f$,

b) $\|Pf\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}$,

c) $\|Pf\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

Ce théorème permet d'étendre les théorèmes d'injection de Sobolev au cas des ouverts bornés, en notant que si $s = d(1/2 - 1/p)$ alors

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Omega)} &= \|Pf\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|Pf\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \|Pf\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C' \|f\|_{H^s(\Omega)} \,. \end{aligned}$$

Remarque. On peut aussi définir de tels opérateurs pour des domaines qui ne sont pas de classe C^m, par exemple un carré en dimension deux, par réflexions successives.

Théorème C.7.18. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, à bord de classe C^m avec $m \geq 1$ un entier. Soit $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Théorème C.7.19 (Théorème de Rellich)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, à bord de classe C^1. Toute partie bornée de $H^1_0(\Omega)$ est d'adhérence compacte dans $L^2(\Omega)$.*

Remarque. Plus généralement on peut montrer que
— si $p < d$ alors l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q \in [1, p^*[$ avec $1/d = 1/p - 1/p^*$,
— si $p = d$ alors l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q \in [1, \infty[$,
— si $p > d$ alors l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$ est compacte.

Démonstration. On ne va écrire la démonstration que dans le cas $d > 2$, le cas de la dimension 2 s'obtient de manière similaire (exercice).

Soit $\mathcal{A}$ une partie bornée de $H^1_0(\Omega)$ et soit $\alpha > 0$, montrons qu'il existe un nombre fini de boules de rayon α dans $L^2(\Omega)$ qui recouvrent $\mathcal{A}$. Commençons par choisir un ouvert ω relativement compact dans Ω tel que

$$\sup_{f \in \mathcal{A}} \|f\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)} \leq \frac{\alpha}{3} \cdot \tag{C.9}$$

Ceci est possible grâce à l'inégalité de Hölder puis une injection de Sobolev, qui impliquent que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\Omega\setminus\omega)} &\leq |\Omega \setminus \omega|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}} \|f\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\ &\leq |\Omega \setminus \omega|^{\frac{1}{d}} \|f\|_{H^1_0(\Omega)} \end{aligned}$$

avec $1 = d(1/2 - 1/2^*)$.

Soit maintenant $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $|y| < d(\omega, \partial\Omega)$. Pour tout $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} \|\tau_y g - g\|_{L^1(\omega)} &\leq |y| \int_\omega \int_0^1 |\nabla g(x - ty)| \, dt dx \\ &\leq |y| \sqrt{|\Omega|} \, \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

et donc par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \|\tau_y g - g\|_{L^2(\omega)} &\leq \|\tau_y g - g\|^\theta_{L^1(\omega)} \|\tau_y g - g\|^{1-\theta}_{L^{2^*}(\omega)} \\ &\leq |y|^\theta |\Omega|^{\frac{\theta}{2}} \, \|g\|_{H^1_0(\Omega)} \end{aligned}$$

avec

$$\frac{1}{2} = \theta + \frac{1-\theta}{2^*} \cdot$$

Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$ on obtient qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{f \in \mathcal{A}} \|\tau_y f - f\|_{L^2(\omega)} \leq C|y|^\theta \, .$$

On en déduit qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < d(\omega, \partial\Omega)$ et tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}^d \, , \quad |y| \leq \varepsilon \, , \quad \sup_{f \in \mathcal{A}} \|\tau_y f - f\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{\alpha}{3} \cdot \tag{C.10}$$

Soit maintenant χ_ε une suite régularisante au sens de la Définition B.1.1 (avec χ supportée dans la boule unité de $\mathbb{R}^d$), et soit

$$B_{\varepsilon,\omega} := \Big\{ (\chi_\varepsilon \star f)_{|\overline{\omega}} \, , \ f \in \mathcal{A} \Big\} \, .$$

Pour $f \in \mathcal{A}$ et $x \in \overline{\omega}$ on a

$$\left|\chi_\varepsilon \star f(x) - f(x)\right| \leq \int_{B(0,\varepsilon)} |\chi_\varepsilon(y)||\tau_{-y} f(x) - f(x)|\, dy$$

donc par l'inégalité de Jensen

$$\left|\chi_\varepsilon \star f(x) - f(x)\right|^2 \leq \int_{B(0,\varepsilon)} |\chi_\varepsilon(y)|\, |\tau_{-y} f(x) - f(x)|^2\, dy$$

et donc par (C.10) et le théorème de Fubini

$$\sup_{f\in\mathcal{A}} \left\|\chi_\varepsilon \star f - f\right\|_{L^2(\omega)} \leq \sup_{f\in\mathcal{A}} \sup_{|y|\leq\varepsilon} \|\tau_{-y} f - f\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{\alpha}{3} \cdot \tag{C.11}$$

Enfin pour $f \in \mathcal{A}$ on a par l'inégalité de Young

$$\|\chi_\varepsilon \star f\|_{L^\infty(\overline{\omega})} \leq \|\chi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

et de même

$$\|\nabla(\chi_\varepsilon \star f)\|_{L^\infty(\overline{\omega})} \leq \|\nabla\chi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

donc $B_{\varepsilon,\omega}$ est uniformément bornée et équicontinue, donc par le théorème d'Ascoli elle est relativement compacte dans $C(\overline{\omega};\mathbb{R})$ et donc dans $L^2(\omega)$. Il existe donc un entier N et des fonctions $g_1, \ldots, g_N$ de $L^2(\omega)$, que l'on prolonge par 0 à Ω, telles que

$$B_{\varepsilon,\omega} \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_{L^2}(g_i, \frac{\alpha}{3})$$

et donc par (C.9) et (C.11)

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_{L^2}(g_i, \alpha)\,.$$

Le théorème est démontré. $\square$

Chapitre D

Analyse spectrale

D.1. Espaces de Hilbert

D.1.1. Rappels. On rappelle qu'un espace de Hilbert est un espace vectoriel H sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire (i.e. d'une forme sesquilinéaire $(\cdot|\cdot)$ de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ – linéaire en la première variable et antilinéaire en la seconde – définie positive), et complet pour la norme $x \mapsto \|x\| := \sqrt{(x|x)}$.

Pour tout sous-ensemble A de H on note

$$A^{\perp} := \Big\{ x \in H \,/\, (x|a) = 0 \ \forall a \in A \Big\} .$$

On rappelle que c'est un sous-espace vectoriel fermé de H, et on vérifie que $A^{\perp} = (\overline{A})^{\perp}$ et que $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.

Les espaces de Hilbert sont uniformément convexes, donc réflexifs.

On rappelle les théorèmes fondamentaux dans ce contexte (voir le cours du premier semestre), et tout d'abord le théorème de projection sur un convexe fermé.

Théorème D.1.1 (Projection sur un convexe fermé)**.** *Soit K un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H et soit $x \in H \setminus K$. Alors*

a) Il existe un unique point $p_K x \in K$ tel que

$$\|x - p_K x\| = \min_{y \in K} \|x - y\| .$$

On prolonge p_K à H en posant $p_K y = y$ pour tout $y \in K$.

b) Le point $p_K x \in K$ est l'unique point $y \in K$ tel que

$$(x - y | z - y) \leq 0 \quad \forall z \in K .$$

c) On a

$$\|p_K x - p_K y\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in H .$$

Rappelons le théorème de représentation de Riesz.

Théorème D.1.2 (de représentation de Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert et soit L une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique vecteur $h \in H$ tel que*

$$Lx = (h|x) \quad \forall x \in H .$$

De plus

$$\|L\|_{H^*} = \|h\|_H .$$

Enfin le théorème suivant est très important dans la pratique.

Théorème D.1.3. *Soit H un espace de Hilbert séparable. Il admet une base hilbertienne, c'est-à-dire une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ totale et orthonormée. En outre* *a) Pour tout $x \in H$ on a*

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|e_n)e_n$$

et la série converge dans H.

b) Pour tous x, y dans H, en notant $x_n := (x|e_n)$ et $y_n := (y|e_n)$ on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n} = (x|y)\,.$$

D.1.2. Théorèmes de Stampacchia et de Lax-Milgram.

Définition D.1.4. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et a une forme bilinéaire sur H. On dit que a est*

a) continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|a(x, y)| \leq C\|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in H\,.$$

b) coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2 \quad \forall x \in H\,.$$

Théorème D.1.5 (Théorème de Stampacchia (1922-1978))**.** *Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur un espace de Hilbert H et soit K un convexe fermé non vide de H. Pour toute forme linéaire continue f sur H il existe un unique $x \in K$ tel que*

$$a(x, y-x) \geq \langle f, y-x\rangle \quad \forall y \in K\,. \tag{D.1}$$

De plus, si a est symétrique alors x est caractérisé par

$$x \in K\,, \quad \frac{1}{2}a(x, x) - \langle f, x\rangle = \min_{y\in K}\Big(\frac{1}{2}a(y, y) - \langle f, y\rangle\Big)\,.$$

Démonstration. D'après le Théorème D.1.2, il existe un unique $h \in H$ tel que

$$\langle f, y\rangle = (h|y) \quad \forall y \in H\,.$$

Pour tout $x \in H$, l'application

$$y \longmapsto a(x, y)$$

est une forme linéaire continue sur H donc par le Théorème D.1.2 encore, il existe un unique élément de H que nous noterons Ax tel que

$$a(x, y) = (Ax|y) \quad \forall y \in H\,.$$

L'application A est linéaire de H dans H et on a pour tout $x \in H$

$$\|Ax\|^2 = |a(x, Ax)| \leq C\|x\|\|Ax\|$$

et

$$(Ax|x) = a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2$$

donc

$$\|Ax\| \leq C\|x\| \quad \text{et} \quad (Ax|x) \geq \alpha\|x\|^2 \quad \forall x \in H\,. \tag{D.2}$$

Il s'agit donc de trouver $x \in K$ tel que

$$(Ax|y-x) \geq (h|y-x) \quad \forall y \in K\,.$$

Si $\rho > 0$ est une constante donnée (que nous fixerons plus loin) il est équivalent de démontrer qu'il existe un unique $x \in K$ tel que

$$(\rho(h - Ax) + x - x|y-x) \leq 0 \quad \forall y \in K\,,$$

ou encore
$$x = p_K(\rho(h - Ax) + x)\,.$$
Notons $S(y) := p_K(\rho(h - Ay) + y)$, nous allons choisir ρ de telle sorte qu'il existe $k < 1$ tel que
$$\forall y, y' \in K\,, \quad \|S(y) - S(y')\| \le k\|y - y'\|$$
ce qui répondra au problème grâce au théorème de point fixe de Picard. La projection étant une contraction (voir le Théorème D.1.1) on sait que
$$\forall y, y' \in K\,, \quad \|S(y) - S(y')\| \le \|y - y' - \rho(Ay - Ay')\|$$
donc par (D.2) il vient pour tous $y, y' \in K$,
$$\begin{aligned}\|S(y) - S(y')\|^2 &\le \|y - y'\|^2 - 2\rho(Ay - Ay'|y - y') + \rho^2\|Ay - Ay\|^2\\ &\le \|y - y'\|^2(1 - 2\rho\alpha + \rho^2C^2)\,.\end{aligned}$$
Il suffit donc de choisir $0 < \rho < 2\alpha/C$ et $k^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2C^2 < 1$ et le résultat suit.

Supposons maintenant que a est symétrique, alors a définit un produit scalaire sur H, et la norme $\sqrt{a(x,x)}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|$ par hypothèse. En appliquant le Théorème D.1.2 il existe un unique $h' \in H$ tel que
$$\langle f, y\rangle = a(h', y) \quad \forall y \in H\,.$$
Alors on a par (D.1)
$$a(h' - x, y - x) \le 0 \quad \forall y \in K \tag{D.3}$$
donc $x = p_K h'$ pour le produit scalaire défini par a. Par le Théorème D.1.1, (D.3) revient à ce que $x \in K$ réalise
$$a(h' - x, h' - x) = \min_{y\in K} a(h' - y, h' - y)$$
ou de manière équivalente réalise
$$\Big(\frac{1}{2}a(x,x) - a(h', x)\Big) = \min_{y\in K}\Big(\frac{1}{2}a(y,y) - a(h', y)\Big)$$
et la conclusion provient de la définition de h'. Le théorème est démontré. $\square$

Le corollaire suivant est particulièrement important pour résoudre des EDP elliptiques par exemple, par une approche variationnelle (voir le Chapitre F). Il est aussi à la base des méthodes d'éléments finis en analyse numérique.

Corollaire D.1.6. *[Théorème de Lax (1926-)-Milgram (1912-1961)] Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur un espace de Hilbert H. Alors pour toute forme linéaire continue $f \in H^*$ il existe un unique $x \in H$ tel que*
$$a(x, y) = \langle f, y\rangle \quad \forall y \in H\,.$$
De plus, si a est symétrique alors x est caractérisé par
$$\frac{1}{2}a(x,x) - \langle f, x\rangle = \min_{y\in H}\Big(\frac{1}{2}a(y,y) - \langle f, y\rangle\Big)\,.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème D.1.5 à $K = H$, qui implique que
$$a(x, y - x) \ge \langle f, y - x\rangle \quad \forall y \in H\,,$$
et le résultat suit. $\square$

D.2. Opérateurs

D.2.1. Définitions et notations. On se donne dans toute la suite deux espaces de Banach E et F. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

Définition D.2.1. *Un opérateur (ou encore opérateur non borné, terminologie courante mais pas très bien choisie !) est une application linéaire T définie sur un sous-espace vectoriel $D(T) \subset E$ à valeurs dans F. L'espace $D(T)$ est le domaine de l'opérateur. On dit que T est borné si $D(T) = E$ et si $T : E \to F$ est continue, autrement dit s'il existe $C > 0$ telle que*

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in E\,.$$

Si T_1 et T_2 sont deux opérateurs de domaines respectifs $D(T_1)$ et $D(T_2)$, on dit que T_2 est une extension de T_1 si $D(T_1) \subset D(T_2)$ et si T_2 coïncide avec T_1 sur $D(T_1)$.

Exemples. On pose $E = F = L^2(\mathbb{R})$ et on considère l'application T de domaine $D(T) = H^1(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall f \in D(T)\,, \quad Tf = f'\,.$$

Alors T est non borné sur E car $D(T) \neq E$. En revanche si $E = H^1(\mathbb{R})$ alors T est borné car

$$\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}\,.$$

On dit que T est à domaine dense si $\overline{D(T)} = E$. On note

$$\begin{aligned}
\operatorname{Gr} T &:= \bigcup_{x\in D(T)} (x, Tx) \quad \text{le graphe de } T\,;\\
\operatorname{Im} T &:= \bigcup_{x\in D(T)} Tx \quad \text{l'image de } T\,;\\
\operatorname{Ker} T &:= \big\{x \in D(T) \,/\, Tx = 0\big\} \quad \text{le noyau de } T\,.
\end{aligned}$$

On dit que T est fermé si son graphe est un fermé de $E \times F$ (ou de manière équivalente si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D(T)$ convergeant vers $x \in E$ telle que $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y on a $x \in D(T)$ et $y = Tx$). Si T est un opérateur à domaine dense, on définit le sous-espace vectoriel $D(T^*)$ de F^* par

$$D(T^*) := \Big\{f \in F^* \,/\, x \in D(T) \longmapsto \langle f, Tx\rangle_{F^*,F} \text{ est continue}\Big\}\,.$$

Remarque. Si T est borné alors $D(T^*) = F^*$ et T^* est borné avec

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)} = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}\,.$$

Il peut arriver que $D(T^*)$ ne soit pas dense dans F^*, même si T est fermé.

Pour tout $f \in D(T^*)$ on définit l'application $g : D(T) \to \mathbb{R}$

$$\forall x \in D(T)\,, \quad g(x) := \langle f, Tx\rangle_{F^*,F}\,.$$

Cette application est linéaire continue, et comme $D(T)$ est dense et $\mathbb{R}$ est complet on peut prolonger g à E tout entier en une application linéaire continue $g \in E^*$ (sans invoquer la densité ni la complétude on peut appliquer le théorème de Hahn-Banach). Ce prolongement est unique par densité de $D(T)$ puisque g est continue. On définit alors l'opérateur T^* sur $D(T^*)$, à valeurs dans E^*, par $T^*f := g$.

Définition D.2.2 (Adjoint d'un opérateur)**.** *Soit T un opérateur à domaine dense. L'adjoint de T, noté T^*, est l'unique opérateur linéaire de domaine*

$$D(T^*) := \Big\{ f \in F^* \,/\, x \in D(T) \longmapsto \langle f, Tx \rangle_{F^*,F} \text{ est continue} \Big\}$$

à valeurs dans E^* défini par

$$\forall f \in D(T^*)\,, \ \forall x \in D(T)\,, \quad \langle T^* f, x \rangle_{E^*,E} = \langle f, Tx \rangle_{F^*,F}\,.$$

Exemple. On pose $E = F = L^2(\mathbb{R})$ et on considère l'application T de domaine $D(T) = H^1(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall f \in D(T)\,, \quad Tf = f' + f\,.$$

L'espace $H^1(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et on a $D(T^*) = H^1(\mathbb{R})$ et

$$T^* f = -f' + f\,.$$

En effet on voit facilement que si $f \in H^1(\mathbb{R})$ alors

$$|\langle f, g + g' \rangle| = |\langle -f' + f, g \rangle| \leq (\|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2}) \|g\|_{L^2}$$

et inversement en considérant le crochet au sens des distributions on a

$$f \in D(T^*) \Rightarrow \exists C > 0\,, \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R})\,, \quad |\langle f', g \rangle| \leq C \|g\|_{L^2}$$

ce qui implique que $f' \in L^2(\mathbb{R})$.

Si A est un sous-ensemble de E on définit son orthogonal

$$A^\perp := \Big\{ f \in E^*, / \, \langle f, x \rangle_{E^*,E} = 0 \quad \forall x \in A \Big\}\,.$$

De même si B est un sous-ensemble de E^* on définit son orthogonal

$$B^\perp := \Big\{ x \in E \,/\, \langle f, x \rangle_{E^*,E} = 0 \quad \forall f \in B \Big\}\,.$$

Exercice. Soit M un sous-espace vectoriel de E et N un sous-espace vectoriel de E^*. Alors

$$(M^\perp)^\perp = \overline{M} \quad \text{et} \quad \overline{N} \subset (N^\perp)^\perp\,.$$

Si E est réflexif alors $\overline{N} = (N^\perp)^\perp$. Plus généralement $(N^\perp)^\perp$ est l'adhérence de N pour la topologie faible $*$.

Proposition D.2.3. *Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur linéaire non borné, à domaine dense. Alors T^* est fermé.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que si $f_n \in D(T^*)$ est une suite convergeant vers f dans F^* et si $T^* f_n$ converge vers g dans E^* alors pour tout $x \in D(T)$

$$\langle f, Tx \rangle - \langle g, x \rangle = \lim_{n \to \infty} \big(\langle f_n, Tx \rangle - \langle T^* f_n, x \rangle \big) = 0$$

et donc pour tout $x \in D(T)$

$$\big| \langle f, Tx \rangle \big| \leq \|g\|_{E^*} \|x\|_E$$

donc $f \in D(T^*)$ et $T^* f = g$. □

La proposition suivante est à démontrer à titre d'exercice.

Proposition D.2.4. *Soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire continu, fermé. Alors on a*

$$Ker T = \big(Im T^*\big)^\perp\,, \quad Ker T^* = \big(Im T\big)^\perp\,, \quad \overline{Im T^*} \subset \big(Ker T\big)^\perp\,, \quad \overline{Im T} = \big(Ker T^*\big)^\perp$$

On a de plus

$$Im T \text{ fermé} \iff Im T^* \text{ fermé} \iff Im T = \big(Ker T^*\big)^\perp \iff Im T^* = \big(Ker T\big)^\perp\,.$$

D.2.2. Opérateurs de rang fini et opérateurs compacts.

Définition D.2.5 (Opérateur de rang fini)**.** *On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang fini si la dimension de son image $\mathrm{Im}\, T$ est finie.*

Définition D.2.6 (Opérateur compact)**.** *On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si l'image par T de la boule unité fermée $B(E)$ de E est relativement compacte dans F pour la topologie forte.*

Proposition D.2.7. *L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ des opérateurs compacts de E dans F est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$. Il contient l'adhérence des opérateurs continus de rang fini.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{K}(E, F)$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ est clair, montrons qu'il est fermé. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs compacts convergeant en norme vers un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Comme F est complet, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $T(B_E)$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de taille ε. Soit n tel que

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Comme $T_n(B_E)$ est relativement compacte, il existe un ensemble fini I et une famille $(y_i)_{i\in I}$ de F tels que

$$\overline{T_n(B_E)} \subset \bigcup_{i\in I} B(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) \, ,$$

et on conclut par l'inégalité triangulaire que

$$\overline{T(B_E)} \subset \bigcup_{i\in I} B(y_i, \varepsilon) \ \ ,$$

d'où le résultat.

Le second résultat provient simplement du fait que les opérateurs de rang fini sont compacts, donc les limites dans $\mathcal{L}(E, F)$ des opérateurs de rang fini sont compacts. □

Remarque. Il peut arriver que l'adhérence des opérateurs continus de rang fini soit distincte de $\mathcal{K}(E, F)$. Un premier exemple a été donné en 1972, en renvoie à [**2**] pour des détails.

Proposition D.2.8. *Dans le cas où F est un espace de Hilbert, tout opérateur compact de $\mathcal{K}(E, F)$ peut s'écrire comme une limite d'opérateurs de $\mathcal{L}(E, F)$ de rang fini.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{K}(E, F)$ et $\varepsilon > 0$. Comme $K := \overline{T(B_E)}$ est compact, il existe un ensemble fini I et une famille $(y_i)_{i\in I}$ de F tels que

$$K \subset \bigcup_{i\in I} B(y_i, \varepsilon) \, .$$

Soit G l'espace vectoriel engendré par $\{y_i,\ i \in I\}$ et soit p_G la projection orthogonale sur G. Alors p_G est un operateur continu de rang fini. On sait que pour tout $x \in B_E$ il existe $i \in I$ tel que

$$\|Tx - y_i\| \leq \varepsilon$$

et donc

$$\|p_G Tx - Tx\| \leq \varepsilon \, .$$

La proposition est démontrée. □

Exercice. La composée d'un opérateur compact et d'un opérateur continu (et réciproquement) est compacte.

Théorème D.2.9 (Théorème de Schauder)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach. Alors T appartient à $\mathcal{K}(E,F)$ si et seulement si T^* appartient à $\mathcal{K}(F^*,E^*)$.*

Démonstration. Supposons que T appartient à $\mathcal{K}(E,F)$ et montrons que $\overline{T^*(B(F^*))}$ est compacte dans E^*. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(F^*)$ et montrons que $(T^*f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente. En notant

$$K := \overline{T(B(E))} \quad \text{et} \quad H := \Big\{\varphi_n : z \in K \longmapsto \varphi_n(z) := \langle f_n, z\rangle\Big\}$$

on remarque que K est un espace métrique compact dans F et que la famille $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui constitue H est équicontinue sur K donc par le théorème d'Ascoli il existe une sous-suite $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et une fonction continue $\varphi \in C(K)$ telles que φ_{n_k} converge uniformément dans K vers φ quand k tend vers l'infini. En particulier on a

$$\sup_{x\in B(E)} \big|\langle f_{n_k} - f_{n_j}, Tx\rangle\big| \longrightarrow 0\,, \quad j,k \to \infty\,.$$

La suite $(T^*f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans E^*, donc elle converge dans E^*. On en déduit que l'ensemble $T^*(B(F^*))$ est relativement compact.

Inversement supposons que T^* appartient à $\mathcal{K}(F^*,E^*)$, alors on sait que T^{**} appartient à $\mathcal{K}(E^{**},F^{**})$ et donc $T^{**}(B_E)$ est d'adhérence compacte dans F^{**}. Mais $T(B_E) = T^{**}(B_E)$ (car $T^{**}_{|E} = T$) et F est fermée dans F^{**} (on rappelle la Proposition A.3.10) donc $T(B_E)$ est d'adhérence compacte dans F. D'où le théorème. □

D.2.3. Alternative de Fredholm. Commençons par démontrer le théorème suivant, qui caractérise les espaces de dimension finie.

Théorème D.2.10 (Théorème de Riesz (1880-1956))**.** *Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité fermée $B(E)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Démonstration. Le résultat repose sur le lemme suivant, démontré plus bas.

Lemme D.2.11. *Soit E un espace vectoriel normé. Si $M \subset E$ est un sous-espace strict fermé de E alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in E$ tel que*

$$\|x\|_E = 1 \quad \textit{et} \quad d(x,M) \geq 1-\varepsilon\,.$$

Supposons que E soit de dimension infinie. Alors on construit par récurrence (en commençant par un vecteur $x_0 \in E$ unitaire arbitraire) une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'en notant E_n l'espace vectoriel (de dimension finie donc fermé) engendré par $(x_k)_{k\leq n}$ on ait

$$x_n \in E_n\,, \quad \|x_n\|_E = 1\,, \quad \text{et} \quad d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}\,\cdot$$

En particulier on a

$$\forall m < n\,, \quad \|x_n - x_m\|_E \geq \frac{1}{2}$$

donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune sous-suite convergente. Donc $B(E)$ n'est pas compact ce qui est une contradiction. D'où le théorème. □

Démonstration du Lemme D.2.11. Soit $y \in E \setminus M$ et $\varepsilon > 0$. Comme M est fermé on sait que

$$d(y,M) > 0$$

donc il existe $y' \in M$ tel que

$$d(y,M) \leq \|y - y'\| \leq \frac{d(y,M)}{1-\varepsilon}\,\cdot$$

Soit alors
$$x := \frac{y - y'}{\|y - y'\|_E}\,.$$
Soit $z \in M$, montrons que $\|x - z\|_E \geq 1 - \varepsilon$. On a
$$\begin{aligned} x - z &= \frac{y - y'}{\|y - y'\|_E} - z \\ &= \frac{1}{\|y - y'\|_E}(y - y' - z\|y - y'\|_E) \\ &= \frac{1}{\|y - y'\|_E}(y - (y' + z\|y - y'\|_E)) \end{aligned}$$
et comme $y' + z\|y - y'\|_E$ appartient à M il vient
$$\|x - z\|_E \geq \frac{d(y, M)}{\|y - y'\|_E} \geq 1 - \varepsilon$$
d'où le résultat. □

Théorème D.2.12 (Alternative de Fredholm (1866-1927))**.** *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur compact de E dans lui-même. Alors*

a) $Ker(Id - T)$ est de dimension finie.

b) $Im(Id - T)$ est fermée et $Im(Id - T) = Ker(Id - T^*)^\perp$.

c) L'opérateur $Id - T$ est injectif si et seulement si il est surjectif.

d) $dim\,Ker(Id - T) = dim\,Ker(Id - T^*)$.

Remarques. Ce résultat concerne la résolution de l'équation $u - Tu = f$ et indique que
– soit pour tout $f \in E$ il existe une unique solution dans E
– soit $u - Tu = 0$ a n solutions linéairement indépendantes et l'équation $u - Tu = f$ a une solution si et seulement si f vérifie n conditions d'orthogonalité.

Le même résultat est vrai pour l'opérateur $\lambda \mathrm{Id} - T$ puisque $\lambda^{-1}T$ est compact.

Démonstration. a) Notons $K_0 := \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)$. On a $B(K_0) = T(B(K_0)) \subset T(B(E))$ donc $B(K_0)$ est compacte, et par le théorème de Riesz on en déduit que K_0 est de dimension finie.

b) D'après la Proposition D.2.4, pour montrer que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - T) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T^*)^\perp$ il suffit de montrer que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - T)$ est fermée. Soit donc une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers y et telle qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que
$$y_n = x_n - Tx_n\,.$$
Montrons que $y \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - T)$. Notons
$$d_n := d(x_n, \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T))$$
et montrons tout d'abord que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Supposons qu'il existe une sous-suite, que nous noterons toujours $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que
$$d_n \longrightarrow \infty\,.$$
Comme $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)$ est de dimension finie il existe x_n' dans $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)$ tel que
$$d_n = \|x_n - x_n'\|_E\,.$$

Soit alors $z_n := \dfrac{x_n - x'_n}{d_n}$, on a

$$d(z_n, \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)) = \frac{1}{d_n} d(x_n, \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)) = 1$$

et

$$z_n - Tz_n = \frac{y_n}{d_n} \longrightarrow 0\,.$$

Comme T est compact, quitte à extraire à nouveau une sous-suite il existe z tel que

$$Tz_n \longrightarrow z$$

et donc comme $z_n - Tz_n \longrightarrow 0$, on a

$$z_n \longrightarrow z\,.$$

Mais alors $z \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)$ et $d(z, \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)) = 1$, ce qui est absurde.

La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée et comme T est compact, quitte à extraire une sous-suite il existe x tel que

$$T(x_n - x'_n) \longrightarrow x \quad \text{et} \quad x_n - x'_n \longrightarrow y + x$$

puisque $y_n = x_n - x'_n - T(x_n - x'_n)$. Et on a alors

$$y = (y + x) - T(y + x) \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - T)\,.$$

c) Supposons que $\mathrm{Id} - T$ est injectif mais pas surjectif et soit la suite

$$E_n := (\mathrm{Id} - T)^n(E)\,.$$

Comme $\mathrm{Id} - T$ n'est pas surjectif, E_1 est un sous-espace strict de E. Par ailleurs E_1 est stable par T. De même on montre que E_2 est un sous-espace strict de E_1 car $\mathrm{Id} - T$ est injectif et pas surjectif, et par récurrence on obtient que E_{n+1} est un sous-espace de E_n, et l'inclusion est stricte car $\mathrm{Id} - T$ est injectif et pas surjectif. Par ailleurs par la propriété b), comme la restriction de T à E_n est un opérateur compact de E_n, l'image E_{n+1} de $(\mathrm{Id} - T)_{|E_n}$ est fermée. La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite strictement décroissante de sous-espaces fermés et par le Lemme D.2.11 il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$x_n \in E_n\,, \quad \|x_n\|_E = 1 \quad \text{et} \quad d(x_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}\,.$$

Soient alors n et m tels que $n > m$, on a

$$T(x_n - x_m) = \Big((x_m - Tx_m) - (x_n - Tx_n) + x_n\Big) - x_m$$

et comme $(x_m - Tx_m) - (x_n - Tx_n) + x_n \in E_{m+1}$ il vient

$$\|T(x_n - x_m)\|_E \geq \frac{1}{2}$$

ce qui est absurde car T est compact. Donc $\mathrm{Id} - T$ est surjectif.

La réciproque s'obtient en appliquant le raisonnement précédent à T^* en utilisant les résultats de la Proposition D.2.4.

d) Définissons $d := \dim \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)$ et $d^* := \dim \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T^*)$. On commence par remarquer que si $\dim E = d$ alors $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - T) = \{0\}$ donc $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T^*)^\perp = \{0\}$ et le résultat est vrai. Supposons maintenant que $d < d^*$. Comme $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)$ est de dimension finie, il admet un supplémentaire topologique dans E.[1] On définit alors p projecteur continu de E

1. En effet si on note φ_i l'application qui à $x \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)$ associe la $i$ème coordonnée de x dans une base de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - T)$ alors par Hahn-Banach on peut prolonger φ_i à E tout entier et l'intersection des $\varphi_i^{-1}(\{0\})$ convient.

sur $\text{Ker}\,(\text{Id} - T)$. Comme $\text{Im}\,(\text{Id} - T) = \text{Ker}\,(\text{Id} - T^*)^{\perp}$ est de codimension finie d^*, il admet un supplémentaire topologique dans E, noté $\tilde{E}$, de dimension d^* [2] . Comme $d < d^*$, il existe une application linéaire $\ell : \text{Ker}\,(\text{Id} - T) \to \tilde{E}$ injective et non surjective. Soit alors

$$B := T + \ell \circ p$$

opérateur compact sur E puisque $\ell \circ p$ est de rang fini. Soit $x \in \text{Ker}\,(\text{Id} - B)$, alors

$$0 = x - Bx = (x - Tx) - \ell(px)$$

donc

$$x - Tx = 0 \quad \text{et} \quad \ell(px) = 0$$

donc $x \in \text{Ker}\,(\text{Id} - T)$ et $px = 0$ car ℓ est injective donc $x = 0$.

D'après la propriété c) appliquée à B on a $\text{Im}\,(\text{Id} - B) = E$. Mais c'est impossible car il existe $y \in \tilde{E} \setminus \text{Im}\,\ell$ et pour un tel y l'équation $x - Bx = y$ n'admet pas de solution. Donc $d \geq d^*$.

En appliquant ce résultat à T^* on trouve

$$\dim \text{Ker}\,(\text{Id} - T^{**}) \leq \dim \text{Ker}\,(\text{Id} - T^*) \leq \dim \text{Ker}\,(\text{Id} - T)\,.$$

Mais on constate facilement que $\text{Ker}\,(\text{Id} - T) \subset \text{Ker}\,(\text{Id} - T^{**})$ donc $d = d^*$. Le théorème est démontré. □

D.2.4. Spectre d'opérateurs : définitions et premières propriétés.

Définition D.2.13. *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{L}(E)$. Le spectre de T, noté $\sigma(T)$, est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble résolvant*

$$\rho(T) := \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, T - \lambda Id \text{ est bijectif de } E \text{ sur } E\Big\}\,.$$

On dit que λ est valeur propre de T si

$$Ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}\,.$$

L'ensemble des valeurs propres de T est appelé le spectre ponctuel de T et noté $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, et l'ensemble des valeurs propres isolées de multiplicité finie est appelé le spectre discret $\sigma_{\mathrm{d}}(T)$. On définit enfin le rayon spectral

$$r(T) := \sup\Big\{|\lambda|\,,\ \lambda \in \sigma(T)\Big\}\,.$$

Remarques. Par le théorème de l'application ouverte A.1.16, si $\lambda \in \rho(T)$ alors l'application $\lambda \longmapsto R(\lambda) := (\lambda \text{Id} - T)^{-1}$ est continue de E dans E. On appelle résolvante cette application.

Les valeurs propres de T sont dans le spectre de T mais en général l'inclusion est stricte.

Exemple. Sur $E = \ell^2(\mathbb{N})$ on introduit le décalage à droite S défini par $S((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (0, u_0, u_1, \dots)$. Alors S est injectif mais pas surjectif, donc $0 \in \sigma(S)$ mais $0 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(S)$.

On peut également définir d'autres sous-ensembles de $\sigma(T)$, dont on ne se servira pas ici : le spectre essentiel est

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(T) := \left\{\begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{C} \,/\, \text{soit } \dim \text{Ker}(T - \lambda \text{Id}) = \infty \\ \qquad\qquad \text{soit } \text{Im}(T - \lambda\text{Id}) \text{ est fermée et } \text{codim}\,\text{Im}(T - \lambda\text{Id}) \neq \dim \text{Ker}(T - \lambda \text{Id}) \\ \qquad\qquad \text{soit } \text{Im}(T - \lambda\text{Id}) \text{ n'est pas fermée} \end{array}\right\}\,.$$

2. On rappelle que $\text{codim}\, A = \dim E_{/A}$ est la dimension de tout supplémentaire topologique de A. En outre si N est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E^* alors $\dim N = \text{codim}\, N^{\perp}$.

On remarque que $\sigma_{\rm ess}(T) \cup \sigma_{\rm p}(T) = \sigma(T)$: si λ appartient ni à $\sigma_{\rm p}(T)$ ni à $\sigma_{\rm ess}(T)$ alors on a $\dim \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}) = 0$ donc $\operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id})$ est fermée et $\operatorname{codim} \operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id}) = 0$ donc $\lambda \in \rho(T)$. On peut montrer que $\sigma_{\rm ess}(T)$ est stable par perturbation compacte. La réunion $\sigma_{\rm ess}(T) \cup \sigma_{\rm p}(T)$ n'est pas forcément disjointe. Enfin le spectre continu est

$$\sigma_{\rm c}(T) := \Big\{ \lambda \in \sigma_{\rm ess}(T) \setminus \sigma_{\rm p}(T) \ / \ \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda \mathrm{Id})} = E \Big\} ,$$

et le spectre résiduel est

$$\sigma_{\rm res}(T) := (\sigma_{\rm ess}(T) \setminus \sigma_{\rm p}(T)) \setminus \sigma_{\rm c}(T) .$$

Proposition D.2.14. *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. Le spectre de T est compact et on a l'inclusion*

$$\sigma(T) \subset \overline{B(0, \|T\|)} . \tag{D.4}$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|T\|$. On remarque que l'équation

$$x = \frac{1}{\lambda}(Tx - f)$$

admet une solution unique grâce au théorème de point fixe de Picard et x est solution de $Tx - \lambda x = f$. Donc $T - \lambda \mathrm{Id}$ est bijectif.

Montrons maintenant que $\sigma(T)$ est fermé, ou de manière équivalente que $\rho(T)$ est ouvert. Soit donc $\lambda_0 \in \rho(T)$ et montrons que pour λ suffisamment proche de λ_0 et pour tout $f \in E$ il existe une solution à

$$Tx - \lambda x = f .$$

Il suffit d'écrire cette équation sous la forme

$$x = (T - \lambda_0 \mathrm{Id})^{-1} (f + (\lambda - \lambda_0)x)$$

qui se résout à nouveau grâce au théorème de point fixe de Picard, dès que

$$|\lambda - \lambda_0| \, \big\| (T - \lambda_0 \mathrm{Id})^{-1} \big\| < 1 .$$

La proposition est démontrée. $\square$

Proposition D.2.15. *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\varphi \in E^*$. Alors la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} , \quad f(\lambda) := \varphi\big((T - \lambda Id)^{-1}\big)$$

et à valeurs dans E^* est holomorphe dans $\rho(T)$. De plus la fonction F définie sur $\rho(T)$ par

$$\forall \lambda \in \rho(T) , \quad F(\lambda) := \lambda f(\lambda)$$

à valeurs dans E^* est bornée quand $|\lambda| \to \infty$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \rho(T)$, qui est ouvert, et soit $\lambda_0 \in \rho(T)$ tel que

$$|\lambda - \lambda_0| \|(T - \lambda \mathrm{Id})^{-1}\| < \frac{1}{2} \cdot$$

Montrons que

$$\big\|(T - \lambda_0 \mathrm{Id})^{-1} - (T - \lambda \mathrm{Id})^{-1} + (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda \mathrm{Id})^{-2}\big\| \leq C |\lambda - \lambda_0|^2 \tag{D.5}$$

où C dépend de T et de λ. En effet on commence par constater que pour tout $A \in \mathcal{L}(E)$ de norme strictement plus petite que 1

$$\big\|(\mathrm{Id} + A)^{-1} - \mathrm{Id} + A\big\| \leq \frac{\|A\|^2}{1 - \|A\|}$$

car
$$(\mathrm{Id}+A)^{-1}-\mathrm{Id}+A=A^2\sum_{n\geq 0}(-1)^nA^n\,.$$
On applique cette inégalité à $A=B^{-1}C$ avec B inversible et C vérifiant
$$\|C\|\|B^{-1}\|<1\,.$$
Alors $B+C=B(\mathrm{Id}+B^{-1}C)$ est inversible et l'inégalité précédente peut se transformer en
$$\|(B+C)^{-1}-B^{-1}+B^{-1}CB^{-1}\|\leq\frac{\|C\|^2\|B^{-1}\|^3}{1-\|C\|\|B^{-1}\|}\,.$$
Le résultat (D.5) suit en appliquant cette inégalité à $B=T-\lambda\mathrm{Id}$ et $C=(\lambda-\lambda_0)\mathrm{Id}$. On a alors
$$\lim_{\lambda_0\to\lambda}(\lambda_0-\lambda)^{-1}\big((T-\lambda_0\mathrm{Id})^{-1}-(T-\lambda\mathrm{Id})^{-1}\big)=(T-\lambda\mathrm{Id})^{-2}$$
dans E, et donc en appliquant φ aux deux membres de l'égalité on trouve
$$\lim_{\lambda_0\to\lambda}(\lambda_0-\lambda)^{-1}\big(f(\lambda_0)-f(\lambda)\big)=\varphi\big((T-\lambda\mathrm{Id})^{-2}\big)\,.$$
Donc f a une dérivée première continue dans $\rho(T)$, elle y est donc holomorphe. En outre
$$\lambda(T-\lambda\mathrm{Id})^{-1}=-\mathrm{Id}+\sum_{n\geq 1}\lambda^{-n}T^n$$
donc $F(\lambda):=\lambda f(\lambda)=\varphi(\lambda(T-\lambda\mathrm{Id})^{-1})$ tend vers $\varphi(-\mathrm{Id})$ quand $|\lambda|\to\infty$, et donc elle est bornée. $\square$

Proposition D.2.16. *Soit E un espace de Banach et $T\in\mathcal{L}(E)$. On a*
$$r(T)=\liminf_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\,. \tag{D.6}$$

Démonstration. On constate que $\Big\{\lambda^n\,|\,\lambda\in\sigma(T)\Big\}\subset\sigma(T^n)$: en effet si
$$(T^n-\lambda^n\mathrm{Id})x=f$$
alors
$$(T-\lambda\mathrm{Id})(T^{n-1}+\cdots+\lambda^{n-1}\mathrm{Id})x=f$$
donc $\rho(T^n)\subset\big\{\lambda^n\,|\,\lambda\in\rho(T)\big\}$. On a donc par (D.4)
$$r^n(T)\leq\|T^n\|\,.$$
Montrons l'inclusion inverse. Soit $|\lambda|>\|T\|$, alors
$$-(T-\lambda\mathrm{Id})^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}T^n\,.$$
Soit $\varphi\in E^*$ et $f(\lambda):=\varphi\big((T-\lambda\mathrm{Id})^{-1}\big)$, alors par la proposition précédente f est holomorphe dans $\rho(T)$ donc a fortiori dans $\{|\lambda|>\|T\|\}$. Donc pour un tel λ on a le développement en série de Laurent
$$f(\lambda)=-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}\varphi(T^n)\,,$$
et ce développement converge même pour $|\lambda|>r(T)$ puisque f y est holomorphe. Donc si $|\lambda|>r(T)$, pour tout $\varphi\in E^*$ on a
$$\sup_{n\geq 0}\big\|\varphi(\lambda^{-n}T^n)\big\|<\infty\,.$$

On peut appliquer le théorème de Banach-Steinhaus dans E^* à la famille de formes linéaires

$$\varphi \mapsto \varphi(\lambda^{-n}T^n)$$

et on trouve

$$\sup_{n\geq 0} \|\lambda^{-n}T^n\| < \infty\,.$$

On en déduit que si $|\lambda| > r(T)$ alors $\|\lambda^{-n}T^n\| \leq C(\lambda)$ et donc

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda|\,.$$

Il suffit alors de prendre l'infimum de cette inégalité pour $|\lambda| > r(T)$ et le résultat suit. □

D.3. Spectre des opérateurs compacts

D.3.1. Structure spectrale des opérateurs compacts. Le théorème suivant, dont la démonstration repose sur l'alternative de Fredholm ci-dessus, donne une description précise du spectre des opérateurs compacts.

Théorème D.3.1 (Spectre des opérateurs compacts)**.** *Soit E un espace de Banach de dimension infinie et soit $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors*

a) $0 \in \sigma(T)$ *;*

b) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \setminus \{0\}$ *;*

c) soit $\sigma(T) = \{0\}$*, soit* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est fini, soit* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est une suite qui tend vers zéro.*

Démonstration. a) Supposons que $0 \notin \sigma(T)$. Alors T est bijectif et comme T est compact on en déduit que $\mathrm{Id} = T \circ T^{-1}$ est compact en tant qu'opérateur sur E. En particulier B_E est compacte ce qui implique que E est de dimension finie par le Théorème de Riesz D.2.10.

b) Soit $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ et supposons que $\mathrm{Ker}(T - \lambda\mathrm{Id}) = \{0\}$. Alors d'après le théorème D.2.12 c) on a $\mathrm{Im}(T - \lambda\mathrm{Id}) = E$ donc $\lambda \in \rho(T)$, contradiction.

c) Commençons par montrer que tous les points de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ sont isolés. Soit donc une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valeurs propres de T, distinctes et non nulles, convergeant vers une limite λ et montrons que $\lambda = 0$. Par définition et par b) il existe une suite de vecteurs non nuls $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E tels que

$$(T - \lambda_n\mathrm{Id})e_n = 0\,.$$

Soit $E_n := \mathrm{Vect}(e_k)_{1\leq k\leq n}$. On montre par récurrence que les e_n sont indépendants. En effet si ce résultat est vrai à l'ordre k alors on suppose que

$$e_{k+1} = \sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell e_\ell$$

et on a alors

$$0 = (T - \lambda_{k+1}\mathrm{Id})e_{k+1} = \sum_{1}^{k} \alpha_\ell(\lambda_\ell - \lambda_{k+1})e_\ell$$

et donc $\alpha_\ell = 0$ pour tout $1 \leq \ell \leq k$. La suite (E_n) est donc strictement croissante, et on a $(T - \lambda_n\mathrm{Id})E_n \subset E_{n-1}$. Le Lemme D.2.11 permet de construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in E_n$, et

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}\,\cdot$$

Soit alors $2 \leq m < n$, on a donc $E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n$. On écrit alors

$$\|\lambda_n^{-1} T x_n - \lambda_m^{-1} T x_m\| = \|\lambda_n^{-1}(T x_n - \lambda_n x_n) - \lambda_m^{-1}(T x_m - \lambda_m x_m) + x_n - x_m\| \geq d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$$

et comme $(T x_n)$ admet une sous-suite convergente on ne peut pas avoir $\lambda_n \to \lambda \neq 0$.

Les éléments de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ sont donc tous isolés et donc l'ensemble

$$\sigma(T) \cap \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, |\lambda| \geq n^{-1}\right\}$$

est soit vide soit fini (comme $\sigma(T)$ est compact, s'il avait une infinité de points distincts il aurait un point d'accumulation).

Enfin si $\sigma(T) \setminus \{0\}$ contient une infinité de points distincts, ils forment une suite qui tend vers 0. Le résultat est démontré. □

D.3.2. Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints. On se place dans le cas où $E = H$ est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Alors grâce au théorème de représentation de Riesz D.1.2, on peut identifier H^* à H et donc T^* à un élément de $\mathcal{L}(H)$.

Définition D.3.2. *Soit H est un espace de Hilbert réel. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si $T^* = T$, donc si*

$$(Tx|y) = (x|Ty) \quad \forall x, y \in H\,.$$

Proposition D.3.3. *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose*

$$m := \inf_{\|x\|=1} (Tx|x) \quad et \quad M := \sup_{\|x\|=1} (Tx|x)\,.$$

Alors

$$\{m, M\} \in \sigma(T) \subset [m, M]\,.$$

Démonstration. Nous n'allons étudier que M, les propriétés correspondantes sur m s'obtiennent en remplaçant T par $-T$.

Soit $\lambda > M$, et montrons que $\lambda \in \rho(T)$. On sait que

$$(Tx|x) \leq M\|x\|^2 \quad \forall x \in H$$

et donc

$$\forall x \in H\,, \quad (\lambda x - Tx|x) \geq (\lambda - M)\|x\|^2$$

et le théorème de Lax-Milgram (Corollaire D.1.6) implique que $\lambda \mathrm{Id} - T$ est bijectif. En effet la forme bilinéaire

$$a(x, y) := (\lambda x - Tx|y)$$

est continue et coercive donc pour tout $z \in H$ il existe un unique $x \in H$ tel que

$$\forall y \in H\,, \quad (\lambda x - Tx|y) = (z|y)\,.$$

Montrons maintenant que $M \in \sigma(T)$. Supposons que ce n'est pas le cas. La forme bilinéaire

$$a(x, y) := (Mx - Tx|y)$$

est symétrique et l'on a

$$a(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in H\,.$$

On peut donc appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et il vient

$$|a(x, y)|^2 \leq a(x, x) a(y, y) \quad \forall x, y \in H$$

donc en l'appliquant à $y = Mx - Tx$ et en utilisant la continuité de a on obtient qu'il existe C telle que

$$\|Mx - Tx\|^2 \leq C(Mx - Tx|x) \quad \forall x \in H\,.$$

Soit maintenant (x_n) une suite telle que

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad (Tx_n|x_n) \longrightarrow M\,.$$

Alors

$$\|Mx_n - Tx_n\| \longrightarrow 0\,.$$

Si $M \in \rho(T)$, alors

$$x_n = (M\,\mathrm{Id} - T)^{-1}(Mx_n - Tx_n) \longrightarrow 0\,,$$

contradiction. Donc $M \in \sigma(T)$. La proposition est démontrée. □

Corollaire D.3.4. *Soit H un espace de Hilbert réel et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Si $\sigma(T) = \{0\}$ alors $T = 0$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente on sait que

$$(Tx|x) = 0 \quad \forall x \in H\,.$$

En écrivant

$$2(Tx|y) = (T(x+y)|x+y) - (Tx|x) - (Ty|y)$$

on obtient le résultat cherché. □

Le théorème suivant est particulièrement important puisqu'il permet de diagonaliser les opérateurs auto-adjoints compacts.

Théorème D.3.5. *Soit H un espace de Hilbert réel séparable et $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact non nul. Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

Démonstration. On note $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des valeurs propres distinctes de T, excepté 0, et on note $\lambda_0 = 0$. On pose $E_n := \mathrm{Ker}\,(T - \lambda_n \mathrm{Id})$. On sait que la dimension de E_n est finie si $n \geq 1$ et que E_0 est éventuellement vide mais peut être de dimension infinie. Le théorème va suivre du fait que la famille $(E_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de H.

Commençons par démontrer que les E_n sont deux-à-deux orthogonaux. Soit $n \neq m$ et $(x, y) \in E_n \times E_m$. Alors

$$Tx = \lambda_n x \quad \text{et} \quad Ty = \lambda_m y$$

et donc

$$(Tx|y) = \lambda_n(x|y) = (x|Ty) = \lambda_m(x|y)$$

donc $(x|y) = 0$.

Montrons maintenant que l'espace vectoriel F engendré par les E_n est dense dans H. On a $T(F) \subset F$ et donc $T(F^\perp) \subset F^\perp$ puisque

$$\forall (x, y) \in F^\perp \times F\,, \quad (Tx|y) = (x|Ty) = 0\,.$$

Soit $T_0 := T_{|F^\perp}$, c'est un opérateur auto-adjoint compact et son spectre est réduit à 0 puisque $\sigma(T_0) \setminus \{0\}$ est constitué de valeurs propres de T_0 qui sont aussi des valeurs propres de T (un vecteur propre associé serait alors à la fois dans F et dans $F^\perp$). Par le corollaire D.3.4 on a donc $T_0 = 0$. On en déduit que

$$F^\perp \subset \mathrm{Ker}\,(T) \subset F \quad \text{et} \quad F^\perp = \{0\}$$

donc F est dense dans H. On construit une base hilbertienne en choisissant une base de chaque E_n (de dimension finie pour $n \geq 1$ et grâce à la séparabilité de H pour E_0). Le théorème est démontré. □

D.4. Spectre des opérateurs bornés auto-adjoints

On se place dans un cadre fonctionnel similaire au paragraphe précédent : H est un espace de Hilbert (non nécessairement réel) et T est un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{L}(H)$.

Définition D.4.1. *Une mesure à valeurs dans les opérateurs est une forme sesquilinéaire sur H dans l'ensemble $\mathcal{M}$ des mesures boréliennes sur $\mathbb{C}$*

$$
\begin{aligned}
H \times H &\longrightarrow \mathcal{M} \\
(g,h) &\longmapsto \mu_{g,h}
\end{aligned}
$$

continue au sens où pour tout compact K de $\mathbb{C}$, il existe une constante C telle que

$$\forall f \in C(K)\,, \quad \forall (g,h) \in H \times H\,, \quad \left|\langle \mu_{g,h}, f\rangle\right| \leq C\|g\|_H\|h\|_H\,.$$

On dit que μ est une mesure bornée à valeurs opérateur s'il existe une constante C telle que

$$\forall f \in C_0(\mathbb{C})\,, \quad \forall (g,h) \in H \times H\,, \quad \left|\langle \mu_{g,h}, f\rangle\right| \leq C\|g\|_H\|h\|_H\,,$$

où $C_0(\mathbb{C})$ est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{C}$ tendant vers zéro à l'infini.

Théorème D.4.2. *Soit T un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{L}(H)$. Alors il existe une unique mesure bornée μ à valeurs opérateurs vérifiant les propriétés suivantes :*

a) Pour tout $(g,h) \in H \times H$, la mesure $\mu_{g,h}$ est supportée dans $\sigma(T)$.

b) Pour tout polynôme P on a

$$P(T) = \int_{\mathbb{R}} P(\lambda)\, d\mu(\lambda)\,.$$

c) Pour tout borélien E de $\mathbb{R}$ l'opérateur

$$\mu(E) := \int_E d\mu(\lambda)$$

est un projecteur orthogonal.

Démonstration. Considérons l'équation différentielle ordinaire sur $\mathcal{L}(H)$

$$\frac{d}{dt}U(t) = iTU(t)\,, \quad U(0) = 0$$

dont la solution est l'exponentielle de iT que l'on peut écrire sous la forme

$$e^{iT} := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}(iT)^n\,.$$

Alors $\big(U(t)\big)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe d'isométries et on remarque que $U^*(t) = U(-t)$. Soit l'opérateur

$$
\delta_T : \begin{aligned}
L^1 \cap \mathcal{F}(L^1)(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(H) \\
f &\longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi T}\mathcal{F}f(\xi)\, d\xi\,.
\end{aligned}
$$

Alors

$$\|\delta_T(f)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{F}f\|_{\mathcal{F}(L^1)(\mathbb{R})}$$

et

$$\delta_T(fg) = \delta_T(f)\delta_T(g)\,.$$

Par ailleurs
$$(\delta_T f)^* = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi T} \mathcal{F}\overline{f}(\xi)\, d\xi$$
donc si f est à valeurs réelles, $\delta_T f$ est auto-adjoint. Soient g, h dans H est montrons que la distribution définie par
$$\langle \mu_{g,h}, f\rangle := (\delta_T(f)g|h)$$
définit une mesure bornée à valeurs opérateur sur $\mathbb{R}$, supportée dans $\sigma(T)$. Nous allons en particulier montrer qu'il existe une constante C telle que pour toute fonction f dans $C_0(\mathbb{C})$,
$$\|\delta_T(f)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C\|f\|_{L^\infty}\,. \tag{D.7}$$
Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction à valeurs réelles telle que $\mathcal{F}\chi \geq 0$ et $\displaystyle\int \chi^2(x)\, dx = 1$ et soit $\theta := \chi^2$. Le théorème de Lebesgue implique que
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi T} \mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi)\mathcal{F}f(\xi)\, d\xi = \delta_T(f)$$
et par ailleurs on sait que
$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi T} \mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi)\mathcal{F}f(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi T} e^{-i\xi\lambda} \mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi) f(\lambda)\, d\lambda d\xi\,.$$
Supposons que le support de f ne rencontre pas $\sigma(T)$. On remarque que
$$\frac{d}{d\xi} e^{i\xi T - i\xi\lambda \mathrm{Id}} = i(T-\lambda\mathrm{Id})e^{i\xi T - i\xi\lambda\mathrm{Id}}$$
et donc si $\lambda \notin \sigma(T)$ il vient
$$-iR(\lambda)\frac{d}{d\xi} e^{i\xi T - i\xi\lambda \mathrm{Id}} = e^{i\xi T - i\xi\lambda\mathrm{Id}}\,.$$
Après deux intégrations par parties il vient alors
$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi T} e^{-i\xi\lambda} \mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi)\, d\xi = -\varepsilon \int_{\mathbb{R}} R(\lambda)^2 e^{i\xi T} e^{-i\xi\lambda} (\mathcal{F}\theta)''(\varepsilon\xi)\, d\xi\,.$$
Si f est supportée dans un ensemble compact K de $\mathbb{R}\setminus\sigma(T)$, en faisant tendre ε vers 0 on trouve que
$$(\delta_T(f)g|h) = 0$$
ce qui implique que le support de la distribution $\mu_{g,h}$ est inclus dans $\sigma(T)$. Montrons à présent que $\big(\delta_T(f)g|g\big) \geq 0$ si $f \geq 0$, ce qui montrera que $\mu_{g,g}$ est une distribution positive, et donc une mesure. On rappelle que
$$\langle \mu_{g,g}, f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int \Big(\int (e^{i\xi T} g|g) e^{-i\xi\lambda} \mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi)\, d\xi \Big) f(\lambda)\, d\lambda\,.$$
En notant que
$$\frac{1}{\varepsilon}\theta\Big(\frac{z-\lambda}{\varepsilon}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\xi z - i\xi\lambda}\mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi)\, d\xi$$
on obtient
$$\frac{1}{\varepsilon}\theta\Big(\frac{T-\lambda\mathrm{Id}}{\varepsilon}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\xi T - i\xi\lambda\mathrm{Id}}\mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi)\, d\xi\,.$$
En rappellant que $\theta = \chi^2$ avec χ à valeurs réelles on a
$$\Big(\theta\Big(\frac{T-\lambda\mathrm{Id}}{\varepsilon}\Big)u|u\Big) = \Big\|\chi\Big(\frac{T-\lambda\mathrm{Id}}{\varepsilon}\Big)u\Big\|_H$$
et donc pour tout $u \in H$ et toute fonction $f \geq 0$ dans $L^1 \cap \mathcal{F}(L^1)(\mathbb{R})$ on a
$$\int \Big(\int (e^{i\xi T} g|g) e^{-i\xi\lambda} \mathcal{F}\theta(\varepsilon\xi)\, d\xi \Big) f(\lambda)\, d\lambda \geq 0\,.$$

ce que l'on voulait démontrer. Montrons maintenant que

$$\langle \mu_{g,g}, f\rangle \leq C\|g\|_H^2 \|f\|_{L^\infty}\,, \tag{D.8}$$

ce qui permettra de prolonger $\mu_{g,g}$ à l'espace des fonctions boréliennes bornées sur $\sigma(T)$. Soit donc $f_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $f_0 = 1$ dans un voisinage $V(T)$ de $\sigma(T)$ et soit $f \in L^1 \cap \mathcal{F}(L^1)(\mathbb{R})$ supportée dans $V(T)$. Alors on a

$$f \leq \|f\|_{L^\infty} f_0$$

donc

$$\langle \mu_{g,g}, f\rangle \leq \langle \mu_{g,g}, f_0\rangle \leq \|f\|_{L^\infty}$$

et donc

$$\langle \mu_{g,g}, f\rangle \leq C\|g\|_H^2 \|f\|_{L^\infty}\,.$$

Enfin pour terminer la démonstration du théorème notons que

$$\int f(\lambda)g(\lambda)\, d\mu(\lambda) = \int f(\lambda)\, d\mu(\lambda) \int g(\lambda)\, d\mu(\lambda)$$

donc il suffit de démontrer que

$$\int d\mu(\lambda) = \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad \int \lambda\, d\mu(\lambda) = T\,.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = 1$ sur un voisinage de $]-1;1[$ et soit $M > r(T)$. Alors en écrivant

$$\varphi_M := \varphi(\cdot/M)$$

on a

$$\int d\mu(\lambda) = \delta_T(\varphi_M) \quad \text{et} \quad \int \lambda\, d\mu(\lambda) = \delta_T((\cdot\varphi)_M)$$

et donc

$$\int d\mu(\lambda) = \frac{M}{2\pi}\int e^{i\xi T}\mathcal{F}\varphi(M\xi)\, d\xi \quad \text{et} \quad \int \lambda\, d\mu(\lambda) = \frac{iM}{2\pi}\int e^{i\xi T}\frac{d}{d\xi}(\mathcal{F}\varphi(M\xi))\, d\xi\,.$$

Autrement dit

$$\int d\mu(\lambda) - \mathrm{Id} = M\int (e^{i\xi T} - 1)\mathcal{F}\varphi(M\xi)\, d\xi$$

et en intégrant par parties et en remarquant que $\varphi(0) = 1$ on a aussi

$$\int \lambda\, d\mu(\lambda) - T = TM\int (e^{i\xi T} - 1)\mathcal{F}\varphi(M\xi)\, d\xi\,.$$

Mais

$$\Big\| M\int (e^{i\xi T} - 1)\mathcal{F}\varphi(M\xi)\, d\xi \Big\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M\|T\|_{\mathcal{L}(H)} \int |\xi||\mathcal{F}\varphi(M\xi)|\, d\xi$$

et le résultat suit en prenant la limite $M \to \infty$. □

D.5. Spectre des opérateurs non bornés auto-adjoints

Définition D.5.1. *Soit H est un espace de Hilbert. Soit $T : D(T) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non borné à domaine dense.*

On dit que T est symétrique si

$$\forall f, g \in D(T)\,, \quad (Tf|g)_H = (f|Tg)_H\,.$$

On dit que T est auto-adjoint si de plus $D(T^*) = D(T)$.

Il existe dans ce cadre un analogue du Théorème D.4.2, que nous énonçons sans démonstration.

Théorème D.5.2. *Soit T un opérateur auto-adjoint non borné sur H de domaine $D(T)$. Alors il existe une unique mesure μ à valeurs opérateur vérifiant les propriétés suivantes :*

a) Pour tout $(f, g) \in H \times H$, la mesure $\mu_{f,g}$ est supportée dans $\sigma(T)$.

b) On a

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu(\lambda) \, .$$

c) Pour tout borélien E de $\mathbb{R}$ l'opérateur

$$\mu(E) := \int_E d\mu(\lambda)$$

est un projecteur orthogonal.

Chapitre E

Opérateurs maximaux monotones

E.1. Définition et premières propriétés

Définition E.1.1 (Opérateur maximal monotone)**.** *Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur non borné sur H de domaine $D(A)$. On dit que A est monotone (ou accrétif) si*

$$\forall f \in D(A)\,, \quad (Af|f) \geq 0\,.$$

On dit que A est maximal monotone si de plus $Im(Id + A) = H$.

Proposition E.1.2. *Soit A un opérateur maximal monotone. Alors*

a) $D(A)$ est dense dans H ;

b) A est fermé ;

c) Pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $Id+\lambda A$ est bijectif de $D(A)$ sur H et son inverse $(Id+\lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné avec $\|(Id+\lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Démonstration. Notons tout d'abord que pour tout $f \in H$ il existe un unique $g \in D(A)$ tel que $g + Ag = f$. En effet si g' est une autre solution alors

$$g - g' + A(g - g') = 0\,.$$

Il suffit alors de prendre le produit scalaire avec $g - g'$ et d'utiliser la monotonie de A pour trouver que $g = g'$. Par ailleurs on note que si $g + Ag = f$ alors

$$\|g\|_H^2 + (Ag|g) = (f|g) \leq \|f\|_H \|g\|_H$$

donc en particulier

$$\|g\|_H \leq \|f\|_H\,.$$

L'opérateur $\mathrm{Id}+A$ est donc bijectif de $D(A)$ sur H, et $R(1) := (\mathrm{Id}+A)^{-1}$ est borné de $D(A)$ dans H, de norme inférieure à 1.

a) Montrons que l'orthogonal de $D(A)$ est réduit à $\{0\}$. Soit donc f dans H tel que

$$\forall g \in D(A)\,, \quad (f|g) = 0$$

et montrons que $f = 0$. On sait qu'il existe $g_0 \in D(A)$ tel que

$$g_0 + Ag_0 = f$$

donc en particulier

$$0 = (f|g_0) = \|g_0\|_H^2 + (Ag_0|g_0) \geq \|g_0\|_H^2\,.$$

On a alors $g_0 = 0$ et donc $f = 0$.

b) Montrons que A est fermé : soit (f_n, g_n) une suite du graphe $\mathrm{Gr}\, A$ de A (donc telle que $f_n \in D(A)$ et $g_n = Af_n$) vérifiant

$$(f_n, g_n) \longrightarrow (f, g)\,,$$

et montrons que $f \in D(A)$ et $g = Af$. On a

$$f_n = (\mathrm{Id} + A)^{-1}(f_n + Af_n) \longrightarrow (\mathrm{Id} + A)^{-1}(f + g)$$

donc $f \in D(A)$ et $f + Af = f + g$, d'où le résultat.

c) On va procéder par récurrence en montrant que si $\mathrm{Id} + \lambda_0 T$ est surjectif pour un certain $\lambda_0 > 0$, avec $(\mathrm{Id} + \lambda_0 A)^{-1}$ de norme plus petite que 1, alors $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} + \lambda A) = H$ pour tout $\lambda > \lambda_0/2$ et $(\mathrm{Id} + \lambda A)^{-1}$ est de norme plus petite que 1. Soit donc $f \in H$ et $\lambda_0/2 < \lambda$, on veut montrer qu'il existe un unique $g \in D(A)$ tel que

$$g + \lambda A g = f\,.$$

Cela revient à résoudre

$$g + \lambda_0 A g = \Big(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\Big) g + \frac{\lambda_0}{\lambda} f$$

ou encore

$$g = (\mathrm{Id} + \lambda_0 A)^{-1} \Big(\Big(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\Big) g + \frac{\lambda_0}{\lambda} f\Big)\,.$$

Cette dernière équation se résout de manière unique grâce au théorème de point fixe de Banach dès que $|1 - \lambda_0/\lambda| < 1$ ou encore $\lambda > \lambda_0/2$. Le fait que la norme de $(\mathrm{Id} + \lambda A)^{-1}$ soit plus petite que 1 se démontre comme au-dessus.

La proposition est donc démontrée. □

Définition E.1.3. *Soit A un opérateur maximal monotone, et soit $\lambda > 0$, on rappelle que la résolvante de A est $R(\lambda) := (Id + \lambda A)^{-1}$, et on définit sa régularisée Yosida par l'opérateur de H dans H*

$$A(\lambda) := \frac{1}{\lambda}(Id - R(\lambda))\,.$$

Proposition E.1.4. *Soit A un opérateur maximal monotone. Alors*

a) Pour tout $\lambda > 0$, tout $f \in H$ et tout $g \in D(A)$,

$$A(\lambda) f = A(R(\lambda) f) \quad \textit{et} \quad A(\lambda) g = R(\lambda)(Ag)\,.$$

b) Pour tout $f \in H$ et tout $g \in D(A)$,

$$\lim_{\lambda \to 0} R(\lambda) f = f \quad \textit{et} \quad \lim_{\lambda \to 0} A(\lambda) g = Ag\,.$$

c) Pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in H$

$$(A(\lambda) f | f) \geq \lambda \|A(\lambda) f\|_H^2\,.$$

d) Pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in H$

$$\|A(\lambda) f\|_H \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_H\,.$$

Démonstration. a) On sait que pour tout $f \in H$,

$$(\mathrm{Id} + \lambda A) R(\lambda) f = f$$

donc $AR(\lambda) f = A(\lambda) f$. Par ailleurs si $g \in D(A)$ alors

$$R(\lambda)(\mathrm{Id} + \lambda A) g = g$$

donc

$$R(\lambda) A g = \frac{1}{\lambda}(g - R(\lambda) g)\,.$$

b) Commençons par considérer $g \in D(A)$, alors (en rappelant que $R(\lambda)$ est de norme plus petite que 1)

$$\big\|g - R(\lambda) g\big\|_H = \lambda \big\|A(\lambda) g\big\|_H \leq \lambda \big\|Ag\big\|_H \longrightarrow 0\,, \quad \lambda \to 0\,.$$

Par ailleurs comme $\overline{D(A)} = H$ puisque A est à domaine dense, alors pour tout $f \in H$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $g \in D(A)$ tel que $\|f - g\|_H \leq \varepsilon$. Alors puisque $R(\lambda)$ est de norme plus petite que 1,

$$\big\|f - R(\lambda)f\big\|_H \leq \big\|g - R(\lambda)g\big\|_H + 2\big\|f - g\big\|_H$$

et donc

$$\big\|f - R(\lambda)f\big\|_H \longrightarrow 0\,, \quad \lambda \to 0\,.$$

Comme $A(\lambda)g = R(\lambda)(Ag)$ on conclut que pour tout $g \in D(A)$, $\lim_{\lambda \to 0} A(\lambda)g = Ag$.

c) On écrit

$$(A(\lambda)f|f) = (A(\lambda)f|f - R(\lambda)(f)) + (A(\lambda)f|R(\lambda)(f)) = \lambda\big\|A(\lambda)f\big\|_H^2 + (AR(\lambda)f|R(\lambda)f)$$

et le résultat suit de la monotonie de A.

d) résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de c). □

Remarque. Cette proposition montre que l'on peut approcher A par une famille d'opérateurs bornés.

E.2. Théorème de Hille-Yosida

On rappelle la Définition D.5.1 des opérateurs symétriques et auto-adjoints. On a le résultat suivant.

Proposition E.2.1. *Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur maximal monotone symétrique. Alors A est auto-adjoint, ainsi que sa résolvante.*

Démonstration. Rappelons que $R(1) := (\mathrm{Id} + A)^{-1}$ est borné sur H donc pour montrer qu'il est auto-adjoint il suffit de vérifier que $R(1)$ est symétrique, donc que

$$\forall f, g \in H\,, \quad \big(R(1)f|g\big)_H = \big(f|R(1)g\big)_H\,.$$

Par définition on a $R(1)f \in D(A)$ et $R(1)g \in D(A)$, et

$$R(1)f + AR(1)f = f\,, \quad R(1)g + AR(1)g = g\,.$$

Comme A est symétrique on a alors

$$\big(f|R(1)g\big)_H = \big(R(1)f + AR(1)f|R(1)g\big)_H = \big(R(1)f|R(1)g + AR(1)g\big)_H = \big(R(1)f|g\big)_H\,.$$

Montrons que $D(A^*) = D(A)$. Soit $f \in D(A^*)$ et soit $h := f + A^*f$. Alors

$$\forall g \in D(A)\,, \quad \big(h|g\big)_H = \big(f|g + Ag\big)_H\,.$$

Comme $R(1)$ est une bijection de H sur $D(A)$, cela équivaut à

$$\forall u \in H\,, \quad \big(h|R(1)u\big)_H = \big(f|u\big)_H\,.$$

On a donc $f = R(1)h \in D(A)$, et la proposition est démontrée. □

Théorème E.2.2. *Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur maximal monotone symétrique. Alors pour tout $u_0 \in H$, il existe une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}; H) \cap C(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}; D(A)) \cap C(\mathbb{R}^+; H)$ au problème d'évolution*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}u + Au = 0 \quad \textit{sur} \quad \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}; \,, \\ &u_{|t=0} = u_0\,. \end{aligned} \tag{E.1}$$

On a de plus pour tout $t > 0$

$$\|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H \quad \textit{et} \quad \Big\|\frac{d}{dt}u(t)\Big\|_H \leq \frac{1}{t}\|u_0\|_H\,.$$

Démonstration. • Unicité. Celle-ci s'obtient très simplement grâce à la monotonie de A. Soient en effet u et v deux solutions associées à la même donnée initiale u_0, alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u-v\|_H^2 = -\big(A(u-v)|u-v\big)_H \leq 0$$

et donc $u-v$ est identiquement nulle.

• Existence. Soit $A(\lambda)$ la régularisée Yosida de A. Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence et l'unicité d'une solution u_λ dans H à

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}u_\lambda + A(\lambda)u_\lambda = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+\,, \\ &u_{\lambda|t=0} = u_0\,. \end{aligned} \tag{E.2}$$

Montrons que les fonctions $t \mapsto \|u_\lambda(t)\|_H$ et $t \mapsto \|A(\lambda)u_\lambda(t)\|_H$ sont décroissantes. On commence par remarquer que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)\|_H^2 = \Big(\frac{d}{dt}u_\lambda(t)|u_\lambda(t)\Big)_H = -\big(A(\lambda)u_\lambda(t)|u_\lambda(t)\big)_H \leq 0\,.$$

Par ailleurs on peut montrer par récurrence (comme $A(\lambda)$ est un opérateur borné) que u_λ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^+;H)$ et

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^k u_\lambda(t) + A(\lambda)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^k u_\lambda(t) = 0\,.$$

Par le même calcul que précédemment il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\|\frac{du_\lambda}{dt}\Big\|_H^2 \leq 0\,.$$

En particulier on a donc pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \geq 0$,

$$\Big\|\frac{d}{dt}u_\lambda\Big\|_H = \|A(\lambda)u_\lambda(t)\|_H \leq \|Au_0\|_H\,.$$

Montrons maintenant que pour tout $t \geq 0$, la suite $u_\lambda(t)$ converge vers une limite $u(t)$ quand λ tend vers 0, et que la convergence est uniforme sur tout compact en temps $[0,T]$. Soient μ et ν deux réels strictement positifs et soit $u_{\lambda\mu}(t) := u_\lambda(t) - u_\mu(t)$. On a

$$\frac{d}{dt}u_{\lambda\mu} + A(\lambda)u_\lambda - A(\mu)u_\mu = 0$$

donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\lambda\mu}(t)\|_H^2 + \Big(A(\lambda)u_\lambda(t) - A(\mu)u_\mu(t)|u_{\lambda\mu}(t)\Big)_H = 0\,.$$

Mais

$$\begin{aligned} &\Big(A(\lambda)u_\lambda - A(\mu)u_\mu|u_{\lambda\mu}\Big)_H \\ &\quad = \Big(A(\lambda)u_\lambda - A(\mu)u_\mu|u_\lambda - R(\lambda)u_\lambda + R(\lambda)u_\lambda - R(\mu)u_\mu + R(\mu)u_\mu - u_\mu\Big)_H \\ &\quad = \Big(A(\lambda)u_\lambda - A(\mu)u_\mu|\lambda A(\lambda)u_\lambda - \mu A(\mu)u_\mu\Big)_H \\ &\qquad + \Big(A(R(\lambda)u_\lambda - R(\mu)u_\mu)|R(\lambda)u_\lambda - R(\mu)u_\mu\Big)_H \\ &\quad \geq \Big(A(\lambda)u_\lambda - A(\mu)u_\mu|\lambda A(\lambda)u_\lambda - \mu A(\mu)u_\mu\Big)_H\,. \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\lambda\mu}(t)\|_H^2 \leq 2(\lambda+\mu)\|Au_0\|_H^2\,.$$

Par intégration on déduit

$$\|u_{\lambda\mu}(t)\|_H^2 \leq 4(\lambda+\mu)t\|Au_0\|_H^2$$

donc pour tout $t \geq 0$, $u_\lambda(t)$ est une suite de Cauchy quand λ tend vers zéro, et donc converge vers une limite notée $u(t)$. En prenant la limite $\mu \to 0$ il vient

$$\|u_\lambda(t) - u(t)\|_H^2 \leq 4\lambda t \|Au_0\|_H^2$$

donc la convergence est uniforme sur tout compact en temps $[0, T]$. On en déduit que u appartient à $C([0, T]; H)$.

Montrons que u est solution de (E.2). On commence par supposer que u_0 appartient à $D(A^2)$ (au sens où u_0 et Au_0 appartiennent à $D(A)$) et montrons que $v_\lambda(t) := \frac{d}{dt} u_\lambda(t)$ converge vers une limite et que la convergence est uniforme sur tout compact en temps $[0, T]$. On a

$$\frac{d}{dt} v_\lambda + A(\lambda) v_\lambda = 0\,,$$

et donc les mêmes calculs que ci-dessus impliquent que la fonction $v_{\lambda\mu}(t) := v_\lambda(t) - v_\mu(t)$ vérifie

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_{\lambda\mu}\|_H^2 \leq \left(\|A(\lambda)v_\lambda\|_H + \|A(\mu)v_\mu\|_H\right)\left(\lambda\|A(\lambda)v_\lambda\|_H + \mu\|A(\mu)v_\mu\|_H\right).$$

Mais

$$\|A(\lambda)v_\lambda(t)\|_H \leq \|A(\lambda)v_\lambda(0)\|_H = \|A(\lambda)A(\lambda)u_0\|_H$$

et de même

$$\|A(\mu)v_\mu(t)\|_H \leq \|A(\mu)v_\mu(0)\|_H = \|A(\mu)A(\mu)u_0\|_H\,.$$

Puisque Au_0 appartient à $D(A)$ on a

$$A(\lambda)A(\lambda)u_0 = R(\lambda)AR(\lambda)Au_0 = R(\lambda)^2 A^2 u_0$$

et donc

$$\|A(\lambda)A(\lambda)u_0\|_H \leq \|A^2u_0\|_H \quad \text{et} \quad \|A(\mu)A(\mu)u_0\|_H \leq \|A^2u_0\|_H\,.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_{\lambda\mu}\|_H^2 \leq 2(\lambda + \mu)\|A^2u_0\|_H$$

et l'on conclut comme ci-dessus que $v_\lambda(t)$ converge vers une limite quand λ tend vers zéro et que cette convergence est uniforme sur tout compact en temps $[0, T]$. On a donc $u \in C^1(\mathbb{R}^+; H)$ et

$$\frac{d}{dt}u_\lambda(t) \longrightarrow \frac{d}{dt}u(t)\,, \quad \lambda \to 0\,, \quad \text{uniformément sur } [0, T]\,.$$

On peut alors passer à la limite dans l'équation (E.2). On a

$$\begin{aligned}\|R(\lambda)u_\lambda(t) - u(t)\|_H &\leq \|R(\lambda)u_\lambda(t) - R(\lambda)u(t)\|_H + \|R(\lambda)u(t) - u(t)\|_H \\ &\leq \|u_\lambda(t) - u(t)\|_H + \|R(\lambda)u(t) - u(t)\|_H \to 0\,, \quad \lambda \to 0\,,\end{aligned}$$

donc comme le graphe de A est fermé on obtient

$$u(t) \in D(A)\,, \quad A(\lambda)u_\lambda(t) = AR(\lambda)u_\lambda(t) \to Au(t)\,, \quad \lambda \to 0\,.$$

On a alors

$$\frac{d}{dt}u(t) + Au(t) = 0\,,$$

u appartient à $C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap C(\mathbb{R}^+; D(A))$ et on a de plus

$$\forall t \geq 0\,, \quad \|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H \quad \text{et} \quad \left\|\frac{d}{dt}u(t)\right\|_H \leq \|Au_0\|_H\,.$$

Plus généralement si u_0 appartient à $D(A^k)$ on montre que u appartient à $C^{k-j}(\mathbb{R}^+; D(A^j))$ pour tout $j \leq k$ avec

$$\forall t \geq 0\,, \quad \|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H \quad \text{et} \quad \Big\|\frac{d^j}{dt^j} u(t)\Big\|_H \leq \|A^j u_0\|_H\,.$$

Après intégration de (E.2) contre $t\frac{d}{dt}u_\lambda$ il vient de plus

$$\int_0^T \Big\|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\Big\|_H^2 \, t dt + \int_0^T (A(\lambda)u_\lambda|\frac{d}{dt}u_\lambda)_H(t)\, t dt = 0\,.$$

D'après la Proposition E.2.1 on sait que $R(\lambda)$ et $A(\lambda)$ sont autoadjoints, et on a donc

$$\begin{aligned}\int_0^T (A(\lambda)u_\lambda|\frac{d}{dt}u_\lambda)_H(t)\, t dt &= \frac{1}{2}\int_0^T t\frac{d}{dt}(A(\lambda)u_\lambda|u_\lambda)_H(t)\, dt \\ &= \frac{T}{2}(A(\lambda)u_\lambda|u_\lambda)_H(T) - \frac{1}{2}\int_0^T (A(\lambda)u_\lambda|u_\lambda)_H(t)\, dt\,.\end{aligned}$$

D'autre part, comme la fonction $t \mapsto \|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\|_H$ est décroissante on a

$$\int_0^T \Big\|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\Big\|_H^2 \, t dt \geq \frac{T^2}{2}\Big\|\frac{d}{dt}u_\lambda(T)\Big\|_H^2\,.$$

Finalement on obtient

$$\frac{1}{2}\|u_\lambda(T)\|_H^2 + T(A(\lambda)u_\lambda|u_\lambda)_H(T) + T^2\Big\|\frac{d}{dt}u_\lambda(T)\Big\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2\,.$$

En particulier on a

$$T^2\Big\|\frac{d}{dt}u_\lambda(T)\Big\|_H^2 \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2$$

et par passage à la limite $\lambda \to 0$ on obtient

$$\Big\|\frac{d}{dt}u(T)\Big\|_H \leq \frac{1}{T}\|u_0\|_H\,.$$

Supposons maintenant que $u_0 \in H$. On commence par montrer la densité de $D(A^2)$ dans $D(A)$ pour la norme du graphe donnée par $\|u\|_H + \|Au\|_H$. Soit donc $u_0 \in D(A)$ et soit la suite $(u_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_{0,n} := R(\frac{1}{n})u_0$$

de sorte que $u_{0,n}$ appartient à $D(A^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$Au_{0,n} = n(u_0 - u_{0,n}) \in D(A) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

On a

$$Au_{0,n} = A(\frac{1}{n})u_0 = R(\frac{1}{n})Au_0$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} Au_{0,n} = Au_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} u_{0,n} = u_0\,.$$

Puisque $D(A^2)$ est dense dans $D(A)$ qui est lui-même dense dans H il existe une suite $(u_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ dans $D(A^2)$ telle que $u_{0,n} \to u_0$ dans H. On note u_n la solution de

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}u_n + Au_n = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\,,\\ &u_{n|t=0} = u_{0,n}\,.\end{aligned}$$

On sait que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$

$$\forall t \geq 0\,, \quad \|u_n(t) - u_m(t)\|_H \leq \|u_{0,n} - u_{0,m}\|_H\,.$$

En outre

$$\forall t > 0\,, \quad \Big\| \frac{d}{dt} u_n(t) - \frac{d}{dt} u_m(t) \Big\|_H \leq \frac{1}{t} \| u_{0,n} - u_{0,m} \|_H\,.$$

On en déduit que (u_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ quand n tend vers l'infini et que $(\frac{d}{dt} u_n)$ converge uniformément sur $[\varepsilon, \infty[$ quand n tend vers l'infini, pour tout $\varepsilon > 0$. On en conclut que $u \in C^1(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}; H) \cap C(\mathbb{R}^+; H)$. Comme A est fermé on a aussi $u \in D(A)$ pour tout $t > 0$ et vérifie l'équation (E.1). $\square$

Chapitre F

Application à la résolution d'EDP

Dans ce chapitre nous donnons quelques exemples de résolution d'EDP par les méthodes décrites dans ce cours.

F.1. Le problème de Dirichlet homogène

Dans ce paragraphe nous considérons Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, dont la frontière est notée Γ et nous supposons pour simplifier que Ω est de classe C^∞.

F.1.1. Résolution du problème de Dirichlet. Nous cherchons une fonction $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{aligned} -\Delta u + au = g\,, \quad & x \in \Omega \\ u = 0\,, \quad & x \in \Gamma \end{aligned} \tag{F.1}$$

avec $a \in C(\overline{\Omega})$ et $a \geq 0$ dans Ω, où l'on rappelle que

$$\Delta := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

désigne le Laplacien par rapport aux variables d'espace. La fonction g est donnée, la condition aux bords $u(x) = 0$ si $x \in \Gamma$ est la condition aux limites de Dirichlet.

Définition F.1.1. *Une solution classique de* (F.1) *est une fonction* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *vérifiant* (F.1). *Une solution faible de* (F.1) *est une fonction* $u \in H_0^1(\Omega)$ *vérifiant*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega auv \, dx = \int_\Omega gv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Remarque. On vérifie facilement que toute solution classique est une solution faible.

Théorème F.1.2. *Pour tout* $g \in L^2(\Omega)$ *il existe* $u \in H_0^1(\Omega)$ *unique solution faible de* (F.1). *De plus* u *s'obtient par le principe de Dirichlet : il vérifie*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + au^2\right) dx - \int_\Omega gu \, dx = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + av^2\right) dx - \int_\Omega gv \, dx \right\}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram (et l'inégalité de Poincaré de la Proposition C.7.15) dans l'espace de Hilbert $H = H_0^1(\Omega)$ avec la forme bilinéaire

$$A(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega auv \, dx$$

et la forme linéaire

$$f(v) := \int_\Omega gv \, dx\,.$$

Le théorème est démontré. □

Remarque. On peut démontrer (et c'est difficile, ce sera admis ici) que la solution construite ci-dessus vérifie en fait que $u \in H^2(\Omega)$ et

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)} .$$

Plus généralement

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|g\|_{H^m(\Omega)} .$$

et en particulier si $m > d/2$ alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

F.1.2. Fonctions propres et décomposition spectrale.

Théorème F.1.3. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ et il existe une suite de réels strictement positifs tendant vers l'infini $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que*

$$e_n \in H_0^1(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N} ,$$

et e_n est solution faible de

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n \quad \text{dans} \quad \Omega . \tag{F.2}$$

On dit que les λ_n sont les valeurs propres de $-\Delta$ avec conditions de Dirichlet, et que les e_n sont les fonctions propres associées.

Démonstration. Pour tout $f \in L^2(\Omega)$ on note $u = Tf$ l'unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ (voir le Théorème F.1.2) du problème

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) .$$

On considère T comme un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et on vérifie (grâce à l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, voir le Théorème C.7.19) que T est un opérateur auto-adjoint compact. Par ailleurs on a $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ et

$$\forall f \in L^2(\Omega) , \quad (Tf|f)_{L^2(\Omega)} \geq 0 .$$

Grâce à la Proposition D.3.3 et au Théorème D.3.5 on obtient que $L^2(\Omega)$ admet une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée de vecteurs propres de T associés à des valeurs propres $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\mu_n > 0$ et $\mu_n \to 0$ quand n tend vers l'infini. On a donc $e_n \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla v \, dx = \frac{1}{\mu_n} \int_\Omega e_n v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) .$$

Donc e_n est une solution faible de (F.2) avec $\lambda_n = \mu_n^{-1}$. Le théorème est démontré. □

Remarque. La régularité elliptique évoquée au paragraphe précédent permet de montrer que $e_n \in C^\infty(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

F.2. L'équation de la chaleur dans un domaine borné

Dans ce paragraphe nous considérons comme au paragraphe précédent Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. On note Γ sa frontière. Nous cherchons à résoudre l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u = 0 , \quad & t \in \mathbb{R}^+ , \quad x \in \Omega \\ u = 0 , \quad & t \in \mathbb{R}^+ , \quad x \in \Gamma \\ u(0,x) = u_0(x) , \quad & x \in \Omega . \end{aligned} \tag{F.3}$$

La condition $u(t,x) = 0$ si $x \in \Gamma$ signifie que la température au bord est maintenue nulle. On pourrait considérer la condition de Neumann exprimant la nullité du flux de chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0\,, \quad x \in \Gamma$$

où n est le vecteur normal unitaire extérieur à Γ, ou encore d'autres conditions aux limites que nous ne détaillerons pas ici.

F.2.1. Méthode variationnelle.

Théorème F.2.1. *Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$. Il existe une unique fonction $u : (t,x) \mapsto u(t,x)$ vérifiant* (F.3) *et telle que*

$$u \in C\big(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)\big) \cap C\big(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}; H^2 \cap H^1_0(\Omega)\big) \cap C^1\big(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}; L^2(\Omega)\big)\,. \tag{F.4}$$

Enfin $u \in L^2\big(\mathbb{R}^+; H^1_0(\Omega)\big)$ et l'on a pour tout $T > 0$

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\,. \tag{F.5}$$

Démonstration. On applique la théorie de Hille-Yosida dans l'espace $H = L^2(\Omega)$ en considérant l'opérateur non borné A de domaine $D(A) := H^2 \cap H^1_0(\Omega) \subset H$ défini par

$$Au := -\Delta u\,.$$

La monotonie de A provient de

$$\big(Au|u\big)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega -\Delta u\, u\,dx = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \geq 0\,.$$

Le fait que A soit maximal monotone provient du fait que

$$\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} + A) = L^2(\Omega)\,,$$

et cela est dû au Théorème F.1.2. Pour montrer que A est auto-adjoint il suffit par la Proposition E.2.1 de vérifier qu'il est symétrique, ce qui provient d'une simple intégration par parties. On peut donc appliquer le Théorème E.2.2 qui donne directement l'existence et l'unicité de u vérifiant (F.4).

Pour obtenir l'égalité d'énergie (F.5) il faut prendre garde au fait que $t \mapsto u(t)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ seulement. La fonction

$$\varphi(t) := \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ et

$$\forall t > 0\,, \quad \varphi'(t) = \Big(u(t)|\frac{\partial u}{\partial t}\Big)_{L^2(\Omega)} = \big(u(t)|\Delta u\big)_{L^2(\Omega)} = -\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Si $0 < \delta < T < \infty$ on a donc

$$\varphi(T) - \varphi(\delta) = \int_\delta^T \varphi'(t)\,dt = -\int_\delta^T \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\,.$$

Le résultat suit du fait que

$$\varphi(\delta) \to \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\,, \quad \delta \to 0\,.$$

Le théorème est démontré. □

Remarque. La régularité elliptique évoquée en Remarque F.1.1 permet de montrer que $u \in C^\infty([\delta,\infty[\times\overline{\Omega})$ pour tout $\delta > 0$.

F.2.2. Méthode spectrale. On sait par le Théorème F.1.3 qu'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ constituée de fonctions propres de $-\Delta$ avec condition au bord de Dirichlet. On cherche alors une solution de (F.3) sous la forme

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(t)e_n(x)$$

et on a nécessairement

$$\frac{da_n}{dt} + \lambda_n a_n = 0$$

et donc

$$a_n(t) = a_n(0)e^{-\lambda_n t}$$

avec les $a_n(0)$ déterminés par

$$u_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(0)e_n(x)\,.$$

Il reste alors à expliciter la convergence de la série, la régularité de u etc.

F.3. L'équation de la chaleur dans l'espace entier

On cherche une distribution $E_d \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$ telle que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta\right)E_d = \delta_{(0,0)} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x\,. \tag{F.6}$$

On suppose que le support de E_d est dans $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x$. On note $\widehat{E}_d(t,\xi)$ la transformée de Fourier partielle de E_d en la variable x : elle est définie par la formule

$$\langle \widehat{E}_d, \varphi\rangle := \langle \mathcal{F}_x E_d, \varphi\rangle := \langle E_d, \mathcal{F}_x\varphi\rangle\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)\,.$$

On vérifie sans difficulté que le membre de droite de l'égalité ci-dessus définit bien une distribution tempérée sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$. On montre facilement que la transformée de Fourier partielle est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$ sur lui-même, dont l'inverse est donné par la formule

$$\langle \mathcal{F}_x^{-1} E_d, \varphi\rangle = \langle E_d, \mathcal{F}_x^{-1}\varphi\rangle\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)\,,$$

ou encore

$$\mathcal{F}_x^{-1} E_d = (2\pi)^{-d}\mathcal{F}_x E_d \circ J\,, \quad J : (t,x) \mapsto (t,-x)\,.$$

Théorème F.3.1. *Pour tout $d \geq 1$ posons*

$$E_d(t,x) := \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} \mathbf{1}_{t>0}\,.$$

Alors E_d est l'unique distribution tempérée sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x$, supportée dans $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x$ et vérifiant (F.6). *Sa transformée de Fourier partielle en la variable x est*

$$\widehat{E}_d(t,\xi) = e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}} \mathbf{1}_{t>0}\,.$$

Démonstration. La formule définissant E_d montre que E_d est continue sur $\mathbb{R}_t \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^d_x$, à support dans $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x$ et vérifie

$$\forall t > 0\,, \quad \int_{\mathbb{R}^d} E_d(t,x)\,dx = 1\,.$$

En particulier puisque E_d est positive ou nulle, on a

$$E_d \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d))$$

donc elle définit bien une distribution tempérée sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x$. Par ailleurs la formule donnant la transformée de Fourier de la Gaussienne (voir l'exercice page 65) montre que sa transformée de Fourier partielle en x est

$$\widehat{E}_d(t,\xi) = e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}} \mathbf{1}_{t>0}\,.$$

On a alors grâce à la formule de Leibniz (voir la Proposition B.4.10)

$$\begin{aligned}(\partial_t + \frac{1}{2}|\xi|^2)\widehat{E}_d &= e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}} \partial_t(\mathbf{1}_{t>0} \otimes 1) \\ &= e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}} (\delta_{t=0} \otimes 1) \\ &= \delta_{t=0} \otimes 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,.\end{aligned}$$

Mais $E_d \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$ donc $\widehat{E}_d \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$. Les distributions tempérées $(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}|\xi|^2)\widehat{E}_d$ et $\delta_{t=0} \otimes 1$ sont égales en tant qu'éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, et donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$ par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$.

En prenant la transformée de Fourier partielle inverse on trouve

$$(\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x)E_d = \delta_{t=0} \otimes \delta_{x=0} \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,.$$

Reste à démontrer l'unicité de la solution. Supposons qu'il existe une autre distribution tempérée $\widetilde{E}_d$ vérifiant les mêmes propriétés que E_d, et soit $F_d := E_d - \widetilde{E}_d$. Le fait que $F_d \equiv 0$ est une conséquence directe du lemme ci-dessous. □

Lemme F.3.2. *Soit $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ telle que*

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta)F = 0 \quad \textit{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$$

avec F supportée dans $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x$. Alors $F \equiv 0$.

Démonstration. En notant τ la variable de Fourier en temps et en notant $\mathcal{F}F$ la transformée de Fourier en (t,x) de F on a

$$(i\tau + \frac{1}{2}|\xi|^2)\mathcal{F}F = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,.$$

Mais alors en multipliant cette égalité par $-i\tau + \frac{1}{2}|\xi|^2$ il vient

$$(\tau^2 + \frac{1}{4}|\xi|^4)\mathcal{F}F = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,,$$

donc $\mathcal{F}F$ est une distribution à support dans $(0,0)$. On sait par le Théorème B.4.5 que $\mathcal{F}F$ est une combinaison linéaire finie de la masse de Dirac en $(0,0)$ et de ses dérivées : on peut écrire

$$\mathcal{F}F = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{(0,0)}\,.$$

Mais alors

$$F = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{d+1}} \tilde{a}_\alpha t^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$$

c'est-à-dire que F est un polynôme. Comme on a supposé que F est identiquement nulle pour $t < 0$ on conclut que $F \equiv 0$. Le lemme est démontré. □

F.4. L'équation de Schrödinger dans l'espace entier

Comme pour l'équation de la chaleur dans le paragraphe précédent, on cherche une distribution $E_d \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$ telle que

$$(i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta)E_d = i\delta_{(0,0)} \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\,. \tag{F.7}$$

On suppose que le support de E_d est dans $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x$. On note $\widehat{E}_d(t,\xi)$ la transformée de Fourier partielle de E_d en la variable x.

Théorème F.4.1. *Pour tout $d \geq 1$ et $\varepsilon > 0$ posons*

$$E^\varepsilon_d(t,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi(\varepsilon+i)t}^{\,d}} e^{-\frac{|x|^2}{2(\varepsilon+i)t}} \mathbf{1}_{t>0}\,,$$

où $\sqrt{\ }$ désigne la détermination principale de la racine carrée. Alors

$$E^\varepsilon_d \longrightarrow E_d \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$$

où E_d est l'unique distribution tempérée sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x$, supportée dans $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x$ et vérifiant (F.7)*. Sa transformée de Fourier partielle en la variable x est*

$$\widehat{E}_d(t,\xi) = e^{-\frac{it|\xi|^2}{2}} \mathbf{1}_{t>0}\,.$$

Remarque. Par abus on note souvent

$$E_d(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi t}^{\,d}} e^{-\frac{|x|^2}{2it}} \mathbf{1}_{t>0}\,.$$

Démonstration. Commençons par démontrer le lemme suivant.

Lemme F.4.2 (Transformée de Fourier des Gaussiennes complexes)**.** *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\, z > 0$ et posons*

$$G_d(x,z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi z}^{\,d}} e^{-\frac{|x|^2}{2z}}\,, \quad x \in \mathbb{R}^d\,,$$

où $\sqrt{\ }$ désigne la détermination principale de la racine carrée. Alors la transformée de Fourier en x de G_d est la fonction définie par

$$\widehat{G}_d(\xi,z) = e^{-\frac{z|\xi|^2}{2}}\,.$$

Démonstration. La fonction $(x,z) \mapsto G_d(x,z)$ est continue sur $\mathbb{R}^d \times \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^d\,, \quad |G_d(x,z)| = \frac{1}{(2\pi|z|)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\mathrm{Re}\, z |x|^2}{2|z|^2}}\,.$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sup_{\mathrm{Re}\, z > a, |z| \leq R} |G_d(x,z)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi a)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{a|x|^2}{2R^2}}\, dx = \frac{R^d}{a^d}\cdot$$

Comme la fonction $z \mapsto G_d(x,z)$ est holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$ on en déduit que

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} G_d(x,z)\, dx \quad \text{est holomorphe dans} \quad \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}\, z > 0\}\,.$$

Cette fonction coïncide, lorsque z parcourt $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, avec

$$z \mapsto e^{-\frac{1}{2}z|\xi|^2}$$

qui est également holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Par le Théorème des zéros isolés on en déduit qu'elles coïncident sur l'ouvert connexe $\{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$. □

Revenons à la démonstration du Théorème F.4.1. On a comme dans le cas de l'équation de la chaleur

$$(i\partial_t + \frac{1}{2}|\xi|^2)\widehat{E}_d = \delta_{t=0} \otimes 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,.$$

En multipliant par $e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}$ il vient

$$\begin{aligned} i\partial_t(e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}\widehat{E}_d) &= e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}(i\partial_t\widehat{E}_d + \frac{1}{2}|\xi|^2\widehat{E}_d) \\ &= ie^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}\delta_{t=0} \otimes 1 \qquad\qquad = i\delta_{t=0} \otimes 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,. \end{aligned}$$

Mais alors au vu de la condition sur le support de $\widehat{E}_d$ il vient

$$e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}\widehat{E}_d = \mathbf{1}_{t>0} \otimes 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,.$$

En multipliant à nouveau par $e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}$ on conclut que l'unique solution du problème de Cauchy pour $\widehat{E}_d$ est donnée par

$$\widehat{E}_d(t,\xi) = \mathbf{1}_{t>0}e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}$$

qui est mesurable et bornée, et définit donc bien une distribution tempérée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. La transformée de Fourier partielle inverse fournit la solution du problème initial, reste à montrer que c'est la limite de E_d^ε quand ε tend vers 0. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$|E_d^\varepsilon(t,x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1+\varepsilon^2)}^d}\mathbf{1}_{t>0}e^{-\frac{\varepsilon|x|^2}{2t(1+\varepsilon^2)}}$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} |E_d^\varepsilon(t,x)|\,dx = \frac{(1+\varepsilon^2)^{\frac{d}{2}}}{\varepsilon^{\frac{d}{2}}}\mathbf{1}_{t>0}\,.$$

On a donc $E_d^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d))$ et donc $E_d^\varepsilon \in d\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ pour tout $\varepsilon > 0$. D'après le Lemme F.4.2 on a

$$\widehat{E_d^\varepsilon}(t,\xi) = \mathbf{1}_{t>0}e^{-\frac{t|\xi|^2}{2(i+\varepsilon)}}$$

donc par convergence dominée

$$\widehat{E_d^\varepsilon} \to \widehat{E}_d \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,, \quad \varepsilon \to 0\,.$$

La transformée de Fourier partielle inverse étant continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ on en déduit le résultat cherché. $\square$

Bibliographie

[1] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, R. Danchin *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer **343**, 2011.

[2] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1983.

[3] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Classics in Mathematics, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer **132**, 2011.

[4] W. Rudin, *Functional analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.

[5] C. Zuily, *Distributions et équations aux dérivées partielles*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, second edition, 1986.

Ces notes s'inspirent également de notes de cours disponibles en ligne de G. Carlier, F. Golse, F. Paulin, Th. Ramond, J. Saint-Raymond, L. Saint-Raymond.

Index